Chapitre 1. Les nombres entiers

Les nombres entiers sont les plus simples, les premiers qui apparaissent à l'esprit. Mais ce n'est pas pour autant qu'ils sont tous aussi importants : certains sont plus premiers que d'autres et servent de matériaux pour les constituer tous ; certains correspondent à des configurations particulières.

1. Nombres figurés

L'idée de nombre provient du besoin de compter les objets, les personnes. Quand on apprend à un bébé à compter jusqu'à cinq, dix ou douze « un, deux, trois, nous irons au bois... quatre, cinq, six, cueillir des cerises... sept, huit neuf, dans mon panier neuf... dix, onze, douze, elles seront toutes rouges.» c'est la ritournelle des nombres entiers que l'on souhaite graver dans sa mémoire. On ne commence pas par zéro car cela ne semble pas faire sens de compter ce qui n'est pas : je peux montrer mon premier doigt, le second ou le troisième, mais je ne peux pas montrer mon zéroième doigt... Le mot zéroième n'existe d'ailleurs même pas dans notre langue.

Quand on énumère des objets, on fait appel à la fonction ordinale des nombres entiers. Mais les nombres entiers peuvent aussi servir à dénombrer les objets d'un ensemble : j'ai une femme, deux enfants et trois chats. Ce n'est pas une énumération, car je pourrais aussi bien avoir zéro femme, un enfant et dix chats. Quand on dénombre des objets, on fait appel à la fonction cardinale des nombres entiers. Quand j'affirme « dans ce pré, il y a quinze vaches » cela suppose que je les ai comptées, en énumérant chacune d'entre elles, ou bien cela peut venir d'une connaissance, un voisin par exemple qui m'en a dit le nombre.

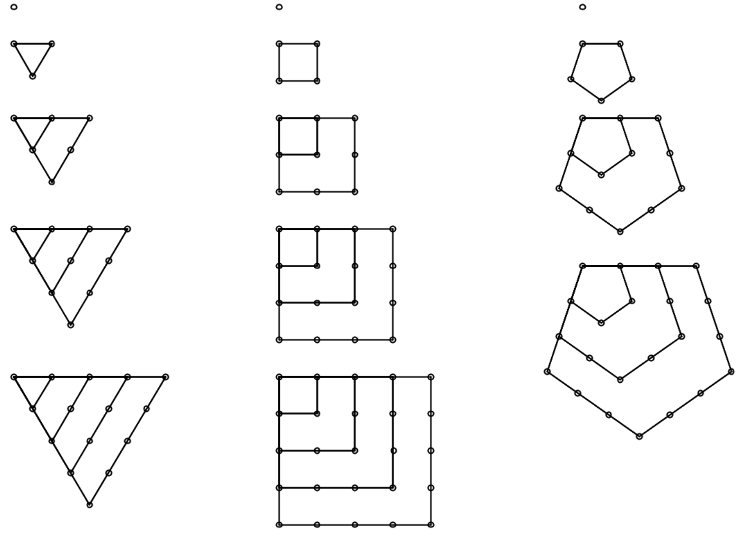
Ces deux fonctions du nombre semblent parfois se confondre. Si je dis que j'en suis à la quinzième page de mon livre, cela fait-il appel à la fonction ordinale ou cardinale du nombre ? Elles sont numérotées (cela ne commence jamais par zéro) et le numéro d'une page apparaît comme un ordinal, mais il y a aussi l'ensemble des pages jusqu'à la page courante qui contient quinze éléments et quinze apparaît comme un cardinal. Néanmoins, dans ces deux fonctions du nombre, il s'agit toujours de nombres entiers.

Par la suite, de nouvelles fonctions vont être dévolues aux nombres et, pour ces nouvelles fonctions, il faudra enrichir l'ensemble des nombres naturels (les entiers positifs) en lui adjoignant de nouveaux nombres. C'est ainsi qu'apparaîtront les entiers négatifs, puis les rationnels, les irrationnels et, enfin, les imaginaires.

Les premières réflexions sur les nombres entiers mettent en avant certaines suites d'entiers que l'on découvre en disposant des unités selon des motifs géométriques. Ce peut être des cailloux que l'on dispose ainsi pour dessiner des formes dans le sable ou n'importe quels autres objets sur n'importe quel support, peu importe. Limité par mon support, je place des points sur les contours de formes simples, des polygones réguliers tracés avec GeoGebra : triangles, carrés, pentagones, etc. Je redécouvre ainsi les séries de nombres qui naissent de ces arrangements : nombres triangulaires, nombres carrés, nombres pentagonaux, etc. On pourrait suivre d'autres voies que les dispositions en forme de polygone. En explorant des arrangements tridimensionnels, on peut définir les nombres tétraédriques, les nombres cubiques, etc. On peut aussi s'intéresser à des suites de polygones concentriques et définir les nombres triangulaires centrés, les nombres carrés centrés, etc.

Les premiers nombres triangulaires sont ainsi 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, etc. On trouve le nombre triangulaire d'indice n en additionnant n au nombre triangulaire d'indice $n-1$, ce que l'on note $T_n = n + T_{n-1}$. Ainsi, puisque $T_7 = 28$, $T_8 = 8 + 28 = 36$. Mais on se rend vite compte que $T_8 = 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$ et, d'une façon générale :

$$T_n = n + (n-1) + (n-2) + ... + 3 + 2 + 1$$



Il s'agit donc de la somme des n premiers entiers, un nombre que l'on calcule plus facilement en additionnant termes à termes deux telles sommes inversées :

$$2T_n = (n+1) + (n-1\ +2) + (n-2\ +3) + ... + (3\ +n-2) + (2\ +n-1) + (1\ +n)$$

Chacun des n termes valant alors $n + 1$, on en déduit que $2\ T_n = n\ (n + 1)$ et donc que $T_n = n\ (n + 1) \div 2$. Plus besoin de calculer tous les termes successifs pour en trouver un quelconque, on peut directement trouver T_{100} par exemple, pour mentionner ce nombre que, dit-on, le jeune Gauss trouva en quelques secondes alors qu'il n'avait que neuf ans.

$$T_{100} = 100 \times 101 \div 2 = 5050$$

Les premiers nombres carrés sont mieux connus puisqu'il s'agit de 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, etc. On reconnaît ici la suite des carrés des entiers définie par la relation $C_n = n^2$. Les nombres pentagonaux viennent ensuite (1, 5, 12, 22, 35, etc.), suivis par les nombres hexagonaux (1, 6, 15, 28, 45, etc.), les nombres heptagonaux (1, 7, 18, 34, 55, etc.), les octogonaux, etc.

Ce qui est remarquable pour toutes ces suites, c'est qu'on peut les obtenir sans peine en remarquant, comme on l'avait fait pour les nombres triangulaires, qu'il est possible d'obtenir le terme suivant en additionnant au terme précédent un nombre simple à déterminer. Pour les nombres triangulaires, il s'agit de n et de la relation $T_n = n + T_{n-1}$, pour les nombres carrés il s'agit du nombre impair de rang n, soit $2\ n - 1$ et de la relation $C_n = 2\ n - 1 + C_{n-1}$. On obtient ainsi la suite des carrés qui apparaît comme la suite des sommes des n premiers nombres impairs :

$$1^2 = 1$$
$$2^2 = 1 + 3 = 4$$
$$3^2 = 1 + 3 + 5 = 4 + 5 = 9$$
$$4^2 = 1 + 3 + 5 + 7 = 9 + 7 = 16$$
$$5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 16 + 9 = 25$$
$$6^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 25 + 11 = 36$$
$$7^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 36 + 13 = 49$$
$$8^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 49 + 15 = 64$$
$$9^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 64 + 17 = 81$$
$$10^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 = 81 + 19 = 100$$

Pour les nombres pentagonaux, il faut ajouter 4, 7, 10, etc. Ce sont des nombres de la forme $3\ n - 2$ (ou $3\ n + 1$, selon le rang qu'on donne au premier véritable polygone). Ainsi a-t-on la suite des nombres définis par $P_n = 3\ n - 2 + P_{n-1}$.

Après 1, $5 = 4 + 1$, $12 = 7 + 5$, $22 = 10 + 12$ (dernier nombre pentagonal de notre illustration) et $35 = 13 + 22$, il y a $51 = 16 + 35$ et puis $70 = 19 + 51$, etc.

Pour les nombres hexagonaux, il faut ajouter des nombres de la forme $4\ n - 3$ (ou $4\ n + 1$), c'est-à-dire 5, 9, 13, 17, 21, etc. On obtient ainsi la suite de nombres 1, $6 = 5 + 1$, $15 = 9 + 6$, $28 = 13 + 15$, $45 = 17 + 28$, $66 = 21 + 45$, etc.

De nombreuses propriétés ont été découvertes sur ces suites de nombres appelés nombres figurés dont certaines sont connues depuis l'antiquité. Par exemple, tout nombre carré est obtenu en additionnant deux nombres triangulaires consécutifs. Ainsi :

$$T_1 + T_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2 = C_2$$
$$T_2 + T_3 = 3 + 6 = 9 = 3^2 = C_3,$$
$$T_3 + T_4 = 6 + 10 = 16 = 4^2 = C_4$$
$$T_4 + T_5 = 10 + 15 = 25 = 5^2 = C_5,$$
$$T_5 + T_6 = 15 + 21 = 36 = 6^2 = C_6,$$
$$T_6 + T_7 = 21 + 28 = 49 = 7^2 = C_7,$$

etc.

Cela peut se prouver par un dessin mais aussi se démontrer par une manipulation algébrique :

Puisque $T_n = n\,(n + 1) \div 2$, on a, au rang suivant, $T_{n+1} = (n + 1)(n + 2) \div 2$.

En additionnant ces deux nombres, on trouve

$$T_n + T_{n+1} = n\,(n + 1) \div 2 + (n + 1)(n + 2) \div 2.$$

En mettant $(n + 1) \div 2$ en facteur, cela s'écrit $(n + 1)(n + n + 2) \div 2$.
Et, comme $(n + n + 2) \div 2 = (2\,n + 2) \div 2 = 2\,(n + 1) \div 2 = n + 1$, cela se simplifie en $(n + 1)^2$ qui est bien le nombre C_{n+1} .

Existe-t-il des nombres triangulaires qui soient en même temps des nombres carrés ? Il y a bien sûr le 1 qui commence toutes nos listes, mais peut-on légitimement parler de nombre triangulaire ou de nombre carré à son propos ? Si on examine les deux listes côte à côte, on s'aperçoit que 36 est le premier vrai nombre triangulaire qui soit carré.

$$36 = 6^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 25 + 11 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8,$$
$$\text{soit } T_8 = C_6$$

Le suivant est $1225 = T_{49} = C_{35}$. Il y a ensuite $41\,616 = T_{288} = C_{204}$ et longtemps après $1\,413\,721 = T_{1681} = C_{1189}$. Il y a une infinité de nombres à la fois triangulaires et carrés, et, ce qui est curieux, le rapport des indices t et c pour lesquels T_t et C_c sont égaux se rapproche d'un fameux nombre irrationnel au fur et à mesure que ces nombres augmentent. Ils s'approchent de $\sqrt{2} \approx 1{,}414$:

$$\frac{8}{6} = \frac{4}{3} \approx 1{,}333 \qquad \frac{49}{35} = \frac{7}{5} = 1{,}4 \qquad \frac{288}{204} = \frac{24}{17} \approx 1{,}412 \qquad \frac{1681}{1189} = \frac{41}{29} \approx 1{,}414$$

La liste de ces nombres carrés triangulaires se trouve dans l'encyclopédie[1] en ligne des séquences de nombres entiers sous le numéro A001110. Ce site donne, non seulement le début de la liste des nombres concernés par cette propriété, mais aussi les principales propriétés qui s'y rattachent avec les références des auteurs.

1 *The On-line Encyclopedia of Integer Sequences* de N.J.A. Sloane, désignée dans la suite par ses initiales *OEIS*

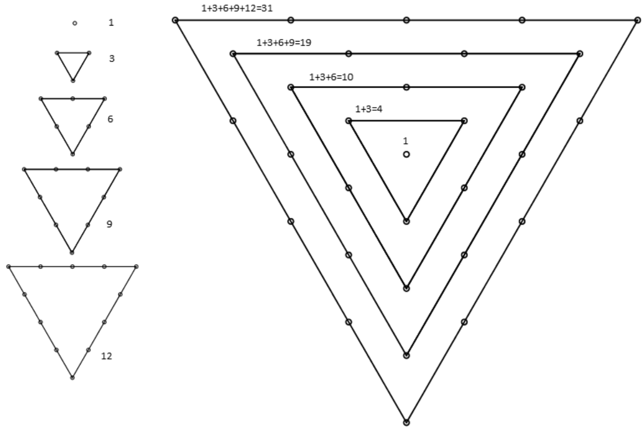
0
1
36
1 225
41 616
1 413 721
48 024 900
1 631 432 881
55 420 693 056
1 882 672 131 025
63 955 431 761 796
2 172 602 007 770 041
73 804 512 832 419 600
2 507 180 834 294 496 361
85 170 343 853 180 456 676
2 893 284 510 173 841 030 625

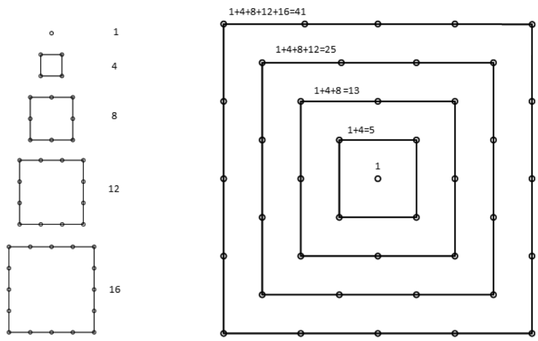
Curieusement, la liste commence par zéro. Personnellement, j'ai un peu de mal à considérer 0 et 1 comme des nombres triangulaires ou carrés, mais parfois la logique a ses raisons... Ici, la logique vient de la formule qui définit ces nombres : pour les nombres triangulaires $T_n = n\ (n + 1) \div 2$, il n'y a aucune raison s'opposant au remplacement de n par 0, ce qui conduit à $T_0 = 0$; de même pour les nombres carrés, puisque $0^2 = 0$ on peut bien considérer que $C_0 = 0$. Ce qui me gêne est la non existence de la figure sous-jacente : si $T_1 = 1$ et $C_1 = 1$ correspondent à un triangle et un carré qui existent, même si leurs côtés mesurent 0, $T_0 = 0$ et $C_0 = 0$ ne correspondent qu'au néant.

Mentionnons la première propriété additionnelle de ces nombres carrés triangulaires donnée par la page de l'OEIS : leur suite obéit à la règle de formation suivante :

$$a_{n-1} \times a_{n+1} = (a_n - 1)^2$$

On peut ainsi calculer le terme de rang $n + 1$, connaissant les deux termes qui précèdent : $a_{n+1} = (a_n - 1)^2 \div a_{n-1}$. Pour calculer a_6 par exemple, on a $a_6 = (a_5 - 1)^2 \div a_4$; avec $a_5 = 1\ 413\ 721$ et $a_4 = 41\ 616$ cela conduit à $a_6 = 1\ 413\ 720^2 \div 41\ 616 = 48\ 024\ 900$. Cette formule ne permet pas de calculer $a_2 = 36$ à partir de $a_1 = 1$ et $a_0 = 0$ car on obtient la forme indéterminée $0 \div 0$. Par contre, on peut calculer $a_3 = 1225$ à partir de $a_2 = 36$ et $a_1 = 1$, puisque $35^2 = 1225$. Cette remarque nous fournit un argument supplémentaire pour considérer que $a_0 = 0$, s'il n'est pas illégitime, est un nombre figuré au statut particulier.





Les nombres polygonaux centrés sont construits selon un procédé très différent : les polygones réguliers concentriques n'ont aucun sommet en commun les uns avec les autres. C'est comme s'ils étaient juxtaposés, les uns à côté des autres, et que l'on considère uniquement la somme des points obtenus. Les triangles juxtaposés qui construisent les nombres triangulaires centrés ont des périmètres égaux à 3, 6, 9, 12, etc. En plaçant ces triangles autour d'un centre (voir la figure), et en comptant les points placés sur les périmètres successifs, on trouve la suite de nombres : 1, 4, 10, 19, 31, 46, 64, 85, 109, 136, 166, 199, etc.

En faisant de même avec des carrés centrés, on trouve la suite 1, 5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145, 181, 221, 265, etc. Les formules donnant les nombres triangulaires centrés t_n se trouvent en remarquant que $t_n = 3\,(n-1) + t_{n-1}$ car il y a $3\,(n-1)$ points sur le périmètre du n^e triangle. De même, les nombres carrés centrés c_n se trouvent en remarquant que $c_n = 4\,(n-1) + c_{n-1}$. Pour obtenir les nombres t_n et c_n en fonction de n, on part de $t_1 = c_1 = 1$ et on remarque que

$$t_n = 1 + 3\,(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)) = 1 + 3\,T_{n-1}$$

$$c_n = 1 + 4\,(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)) = 1 + 4\,T_{n-1}$$

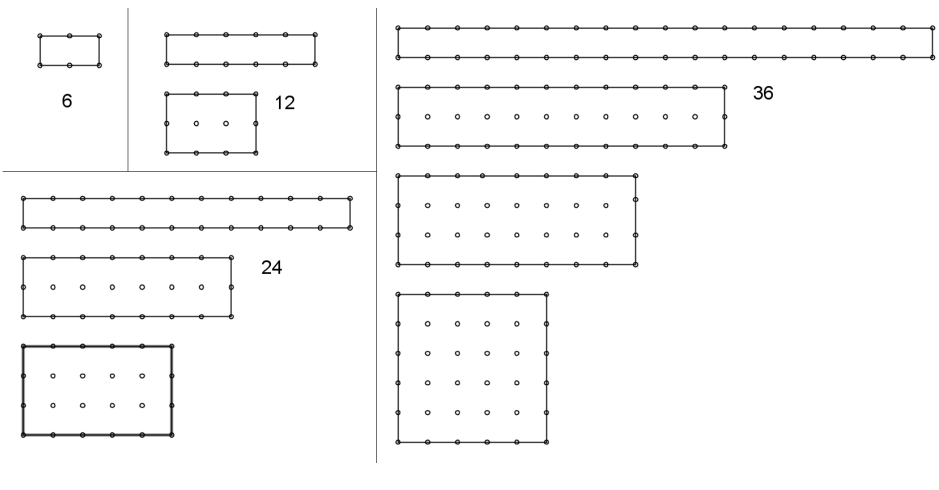
Notre connaissance des nombres triangulaires trouve là une utilité puisqu'il suffit de remplacer T_{n-1} par $n\ (n-1) \div 2$. On obtient :

$$t_n = 1 + 3T_{n-1} = 1 + 3\,\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2+3n(n-1)}{2} = \frac{3n^2-3n+2}{2}$$

$$\text{et } c_n = 1 + 4T_{n-1} = 1 + 4\,\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2+4n(n-1)}{2} = 2n^2-2n+1$$

2. Découverte des nombres premiers

Les nombres figurés sont aussi et avant tout un moyen de représenter les nombres entiers. Avant même l'invention de la numération, on peut imaginer que les hommes comptaient déjà en traçant des traits sur une paroi, en creusant des encoches sur un bâton ou un os, en alignant des cailloux ou en les arrangeant en forme de rectangles. Disposer les unités en forme de rectangles relève d'une activité mathématique spécifique qui s'apparente à une division. Il faut partager une certaine quantité d'unités en parties égales pour les disposer en rectangle. Si je veux représenter le nombre 15 en disposant 15 cailloux (15 points) en forme de rectangle, je peux faire 3 rangées de 5 cailloux ou bien 5 rangées de 3 cailloux, mais c'est tout car 15 n'est divisible que par 3 et par 5. Il y a bien sûr la possibilité de faire une seule ligne de 15 cailloux ou 15 lignes de 1 caillou, ce qui revient au même, mais cette possibilité ne répond pas tout à fait à notre préoccupation : tous les nombres peuvent être représentés ainsi en alignant des cailloux, des traits ou des encoches. Pour dépasser ce stade de la représentation des nombres, on peut regrouper les unités qui les composent lorsque c'est possible.



Seule une partie des nombres peut être disposée en forme de rectangle, ce sont les nombres composés (ou rectangulaires). La liste de ces nombres composés commence par 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, etc. En fait, presque tous les nombres sont composés : tous les nombres pairs (sauf 2) et beaucoup d'autres nombres, parfois consécutifs comme la suite 24, 25, 26, 27, 28 qui en contient cinq d'affilée. En ne comptant pas comme différents les rectangles de même dimension, comme 3 par 5 et 5 par 3, beaucoup des nombres composés ne forment qu'un type de rectangle. Ainsi 15 = 3 × 5 ou 57 = 3 × 19 ou encore 95 = 5 × 19 ne forment qu'un seul type de rectangle.

	Entier	Rect.1	Rect.2	Rect.3	Rect.4
1	4	2×2			
2	6	2×3			
3	8	2×4			
4	9	3×3			
5	10	2×5			
6	12	2×6	3×4		
7	14	2×7			
8	15	3×5			
9	16	2×8	4×4		
10	18	2×9	3×6		
11	20	2×10	4×5		
12	21	3×7			
13	22	2×11			
14	24	2×12	3×8	4×6	
15	25	5×5			
16	26	2×13			
17	27	3×9			
18	28	2×14	4×7		
19	30	2×15	3×10	5×6	
20	32	2×16	4×8		
21	33	3×11			
22	34	2×17			
23	35	5×7			
24	36	2×18	3×12	4×9	6×6
25	38	2×19			
26	39	3×13			
27	40	2×20	4×10	5×8	
28	42	2×21	3×14	6×7	
29	44	2×22	4×11		
30	45	3×15	5×9		
31	46	2×23			
32	48	2×24	3×16	4×12	6×8
33	49	7×7			
34	50	2×25	5×10		
35	51	3×17			
36	52	2×26	4×13		
37	54	2×27	3×18	6×9	

	Entier	Rect.1	Rect.2	Rect.3	Rect.4	Rect.5
38	55	5×11				
39	56	2×28	4×14	7×8		
40	57	3×19				
41	58	2×29				
42	60	2×30	3×20	4×15	5×12	6×10
43	62	2×31				
44	63	3×21	7×9			
45	64	2×32	4×16	8×8		
46	65	5×13				
47	66	2×33	3×22	6×11		
48	68	2×34	4×17			
49	69	3×23				
50	70	2×35	5×14	7×10		
51	72	2×36	3×24	4×18	6×12	8×9
52	74	2×37				
53	75	3×25	5×15			
54	76	2×38	4×19			
55	77	7×11				
56	78	2×39	3×26	6×13		
57	80	2×40	4×20	5×16	8×10	
58	81	3×27	9×9			
59	82	2×41				
60	84	2×42	3×28	4×21	6×14	7×12
61	85	5×17				
62	86	2×43				
63	87	3×29				
64	88	2×44	4×22	8×11		
65	90	2×45	3×30	5×18	6×15	9×10
66	91	7×13				
67	92	2×46	4×23			
68	93	3×31				
69	94	2×47				
70	95	5×19				
71	96	2×48	3×32	4×24	6×16	8×12
72	98	2×49	7×14			
73	99	3×33	9×11			
74	100	2×50	4×25	5×20	10×10	