PREMIÈRE PARTIE

LES NOMBRES

Cette partie est consacrée aux nombres.

Vous revisiterez tous les nombres rencontrés au collège, en commençant par les nombres entiers pour finir par les nombres réels.

L’aperçu historique vous permettra de comprendre qu’il existe différentes catégories de nombres.

Vous apprendrez à ranger les nombres dans des ensembles et à utiliser les différentes écritures d’un nombre.

Vous reverrez toutes les règles de calcul.

L’objectif de cette partie est de synthétiser toutes vos connaissances, de les approfondir mais aussi de compléter celles qui vous manquent.

CHAPITRE 1
LES NOMBRES ENTIERS NATURELS

Les nombres entiers naturels sont les nombres dont on se sert pour compter : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; …

Compter, c'est comparer des collections différentes.

Par exemple, un berger peut mettre un caillou dans un récipient au moment où chacune de ses bêtes sort de l'étable. Le soir, en enlevant un caillou chaque fois qu'une bête rentre, il pourra vérifier qu'aucune ne s'est perdue si le récipient est vide quand la dernière est rentrée.

Cette méthode de comptage avec des cailloux est très ancienne.

Le mot « calcul » vient de *calculus*, mot latin qui signifie caillou.

L'adjectif « entier » a la même racine que « intègre » ou « intact » (du latin *integer*).

Ainsi, les nombres entiers qualifient ceux qui ont un nombre complet d'unités.

On note l'ensemble des nombres entiers naturels $\mathbb{N}$.

ÉTAPE 1 : MULTIPLES ET DIVISEURS

Soit a et b deux nombres entiers positifs.

On dit que b est un **diviseur** de a lorsqu'il existe un nombre entier positif n tel que $a = b \times n$.

Par exemple, $36 = 4 \times 9$, donc 4 et 9 sont des diviseurs de 36.

1 divise tous les nombres entiers car pour tout nombre entier b : $b = b \times 1$.

1 n'a qu'un seul diviseur entier naturel, lui-même.

En dehors de 1, les entiers ont toujours au moins deux diviseurs : 1, et eux-mêmes.

On dit que a est un **multiple** de b, s'il existe un entier positif n tel que $a = b \times n$.

Dans l'exemple précédent, 36 est un multiple de 4 et de 9.

0 est multiple de tous les nombres entiers car pour tout nombre entier a : $a \times 0 = 0$.

Exemples,

– les diviseurs de 60 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.
– les multiples de 3 sont : 0, 3, 6, 9, 12, ...

EXERCICES

1. a) Écrire la liste des multiples de 15 inférieurs à 100.

   b) Existe-t-il un multiple de 23 compris entre 480 et 490 ? Si oui lequel ?

   c) Existe-t-il un multiple de 54 compris entre 1 870 et 1 880 ?
   Si oui lequel ?

2. Donner la liste des diviseurs de 123.

3. Quel est le plus petit nombre entier naturel possédant exactement six diviseurs ?

4. Léa a travaillé pendant les vacances scolaires et a touché son premier salaire.

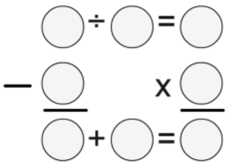
   Deviner son salaire sachant que c'est un nombre entier :

   – entre 500 et 700 euros,
   – multiple de 9 et de 10,
   – divisible par 4.

   Expliquer la réponse.

5. Le nombre 6 est appelé parfait, car il est égal à la somme de ses diviseurs (autres que lui-même) : $6 = 1 + 2 + 3$.
   Montrer que les entiers 28 et 496 sont parfaits.

6. Placer les nombres de 1 à 8 dans les disques de telle sorte que les quatre résultats soient corrects. Il y a deux solutions.



ÉTAPE 2 : DIVISION EUCLIDIENNE

Soit a et b deux nombres entiers positifs avec $b \neq 0$.

Effectuer la **division euclidienne** de a par b signifie déterminer deux nombres entiers positifs q et r tels que :

$$a = b \times q + r \text{ et } r < b.$$

Dans ce cas, on dit que a est le **dividende**, b est le **diviseur**, q est le **quotient** et r est le **reste**.

Par exemple, lorsqu'on effectue la division euclidienne de 60 par 7, on obtient,

$$60 = 7 \times 8 + 4.$$

8 est le quotient et 4 est le reste.

C'est depuis le milieu du XX^{e} siècle, qu'en l'honneur du grand mathématicien grec Euclide, on a décidé d'appeler « division euclidienne » une division dont le dividende, le diviseur, le quotient et le reste sont des entiers.

7. Voici deux copies d'écran d'une feuille de calculs Excel avant et après les calculs :

Au départ

	A	B	C	D
1	**Étape**	***a***	***b***	**Différence**
2	1	29	3	
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

Après calculs

	A	B	C	D
1	**Étape**	***a***	***b***	**Différence**
2	1	29	3	26
3	2	26	3	23
4	3	23	3	20
5	4	20	3	17
6	5	17	3	14
7	6	14	3	11
8	7	11	3	8
9	8	8	3	5
10	9	5	3	2

a) Décrire ce que fait la feuille de calculs.

b) Pourquoi s'arrête-t-on à l'étape 9 ?

c) Que représentent les valeurs dans les cases grisées pour les nombres a et b ?

8. Lorsque je divise un nombre entier naturel par 6, est-il possible d'obtenir un reste de 10 ? Expliquer.

9. Effectuer la division euclidienne de 1 254 par 27.
Donner le résultat sous la forme $a = bq + r$.

10. **Comment vérifier si une carte bancaire est valide ?**

Le numéro des cartes bancaires en France comporte seize chiffres.

– Le premier chiffre identifie le type de carte. (3 : American Express / 4 : Visa / 5 : Eurocard-Mastercard)

– Les trois chiffres suivants identifient la banque. Un numéro de carte commençant par 4 970 désigne donc la carte Visa de la Banque Postale.

– Les onze chiffres suivants identifient le propriétaire de la carte.

– Et le dernier chiffre est la clé de Luhn.

Ce n'est pas une clé de contrôle très puissante, mais juste un moyen de vérifier si, lors des saisies, des erreurs sont intervenues.

La clé se calcule en fonction des quinze premiers chiffres de la manière suivante :

- on remplace tous les chiffres de rang impair (donc le premier, le troisième, etc) par leur double ;
- si l'un de ces doubles est supérieur ou égal à 10, on fait la somme des deux chiffres obtenus ;
- on additionne les 15 chiffres obtenus ;
- on fait la division euclidienne de cette somme par 10 et on note le reste. La clé de Luhn est alors le complément à 10 de ce reste.

Déterminer la clé de Luhn de la carte bancaire dont les quinze premiers chiffres sont $3210\ 4567\ 8910\ 111$.

11. Le code ISBN (International Standard Book Number, Numéro international normalisé du livre) permet d'identifier chaque livre de manière unique dans le monde entier. Il sert notamment de numéro de référence dans des bases de données informatiques (bibliothèques, éditeurs). Il comprend dix chiffres répartis en quatre groupes séparés par des tirets.

    Par exemple, ISBN $2 - 2660 - 2612 - 7$.

    Le premier groupe correspond au pays de l'éditeur (2 pour la France), le deuxième groupe est le numéro de l'éditeur, le troisième celui du livre, enfin le dernier chiffre est une clé qui sert à vérifier qu'on n'a pas effectué d'erreur de saisie en rentrant le code dans un ordinateur.

    Cette clé est calculée de la manière suivante.

    À partir des neuf premiers chiffres (sans tenir compte des tirets), on calcule la somme :

    $S = 1 \times$ 1^er^ chiffre $+2 \times$ 2^nd^ chiffre $+ \cdots + 9 \times$ 9^e^ chiffre, puis on calcule le reste de la division euclidienne de S par 11. Ce reste est la clé. Il s'agit d'un entier compris entre 0 et 10 inclus; s'il vaut 10 on l'écrit alors avec le chiffre romain X.

a) Compléter le code suivant par sa clé :
ISBN $0 - 7136 - 6020 - \bullet$

b) Un bibliothécaire saisit le code ISBN $2–7003–1999–7$. Le logiciel lui indique alors qu'il a commis une erreur.

Comment le logiciel a-t-il détecté l'erreur ?

c) Le bibliothécaire s'aperçoit alors qu'il a interverti les deux chiffres du numéro de l'éditeur ; il saisit donc le code ISBN $2–0703–1999–7$.

Ce code est-il cohérent avec la clé de contrôle ?

d) Le bibliothécaire reçoit un nouveau message d'erreur en rentrant le code ISBN $2–8536–8313 - 2$.
Corriger son erreur, sachant qu'elle porte seulement sur le chiffre de gauche.

ÉTAPE 3 : LES NOMBRES PREMIERS

Un nombre entier naturel est **premier** s'il n'admet que deux diviseurs, qui sont 1 et lui-même.

Ainsi, 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.
2 est premier, 3 est premier, 4 n'est pas premier car il est divisible par 2, et ainsi de suite.

Pour savoir si un nombre entier n est premier, il suffit de diviser n (le nombre à tester) par les nombres premiers p successifs : $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$
On s'arrête dès que $p^2 > n$.

- si n est divisible par l'un de ces nombres, il n'est pas premier ;
- si n n'est divisible par aucun de ces nombres, il est premier.

Par exemple, 103 n'est pas divisible par 2 (car il n'est pas pair), ni par 3 (car la somme de ses chiffres n'est pas un multiple de 3), ni par 5 (car il ne se termine ni par 0 ni par 5), ni par 7, ni par 11.
Or $11^2 = 121 > 103$, il est donc inutile de continuer, on peut affirmer que 103 est un nombre premier.

Les nombres premiers étaient déjà connus des Grecs et remarqués pour leurs particularités. Mais ce n'est que récemment, en 1983, que trois mathématiciens (Ron Rivest, Adi Shamir et Len Adleman) leur ont trouvé une application pratique en mettant au point une méthode permettant de crypter l'information.

Aujourd'hui, ils servent à crypter des messages à l'aide de « clefs », dont chacune est le produit de deux grands nombres premiers.

Ces clefs sont difficiles à casser puisque retrouver les diviseurs premiers d'un très grand nombre demande une énorme puissance de calcul et représente trop de temps (ou d'argent) pour des individus malveillants.

Toutes les opérations par carte bancaire mettent donc en œuvre les nombres premiers, pour garantir la sécurité des transactions.

EXERCICES

12. Vérifier que chacun des nombres suivants n'est pas premier :
    39 ; 72 ; 135.

13. Déterminer les nombres premiers parmi les entiers suivants :
    91 ; 141 ; 161 ; 193 ; 221 ; 307 ; 403.

14. Mathématicien, astronome, géographe et poète grec, Eratosthène (284 av J.-C ; 192 av. J.-C) est célèbre, d'une part pour avoir été le premier à déterminer avec une remarquable précision le périmètre de la terre et d'autre part pour avoir mis au point un moyen élémentaire de déterminer les nombres premiers inférieurs à un nombre entier donné.

    Ce moyen est appelé « le crible d'Eratosthène ».