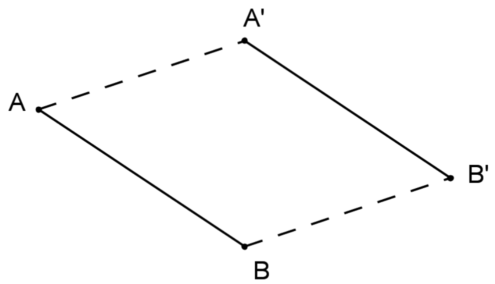
1. Les vecteurs

1. Notion de vecteur

En classe de seconde, vous avez défini la **translation**, qui est une transformation.

Elle permet de déplacer une figure dans le plan avec la règle suivante :
Si A est transformé en A' et B en B', alors AA'B'B est un parallélogramme.



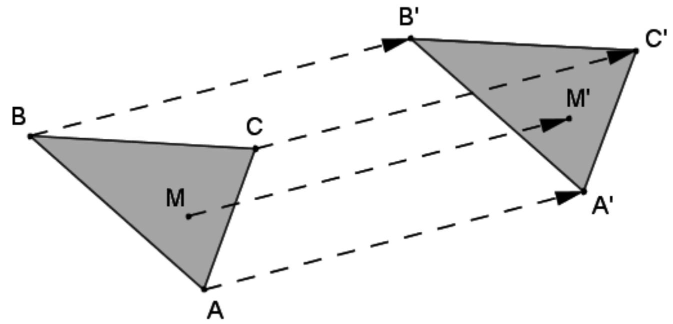
◗ *Question 1*

En quel point est transformé le milieu I du segment [AB] ? Démontrez votre résultat.

✍

Soit ABC un triangle.
La translation qui transforme A en A', transforme de la même façon B en B', C en C'.

Ces points, reliés par une flèche indiquant le sens du déplacement, constituent une collection de couples : (A, A'), (B, B'), (C, C').



Comme le triangle n'est pas déformé, tous les points du triangle sont déplacés de la même façon.
C'est-à-dire que tout point M, à l'intérieur du triangle ABC, est transformé en le point M' tel que (MM') soit parallèle à (AA') et les segments [AA'] et [MM'] ont même longueur.

On dit que M' est l'**image** de M par cette translation (dont nous préciserons les caractéristiques plus tard).

Nous pouvons imaginer une infinité de flèches qui relient un point du triangle à son image.
Cette infinité de couples définit **un vecteur**, chaque couple est **un représentant** de ce vecteur et chaque représentant peut être dessiné à l'aide d'une flèche.

> Un vecteur est donc défini par sa **direction** (le support de la flèche), son **sens** (le sens de la flèche) et sa **longueur** (la longueur de la flèche).

Deux vecteurs, ont même direction lorsque les supports sont parallèles. Et un vecteur de direction donnée, peut avoir deux sens possibles.

> Deux vecteurs qui ont la même longueur, la même direction et le même sens sont dits **égaux**.

Dans la pratique, pour définir un vecteur il suffit d'indiquer l'un de ses représentants.

Pour le nommer nous avons deux solutions :

- Soit nous lui donnons un nom surmonté d'une flèche (pour préciser qu'il s'agit bien d'un vecteur et non pour indiquer son sens).

Les lettres généralement utilisées sont u, v ou w.

Nous pouvons, par exemple choisir de le nommer $\vec{u}$.
On dira que le point M' est l'image du point M par la translation de vecteur $\vec{u}$.

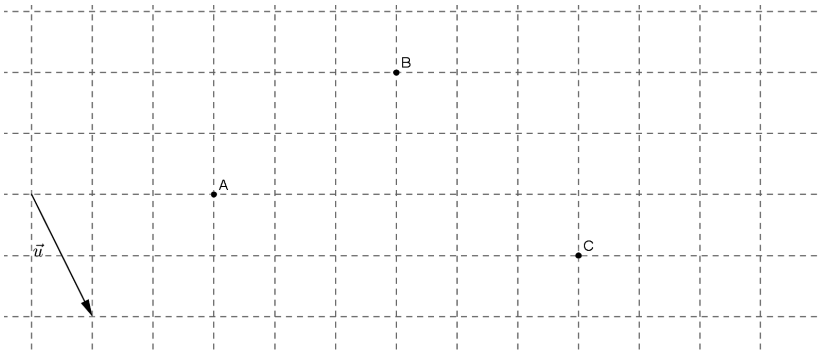
- Soit nous choisissons l'un des couples et nous l'écrivons sans parenthèses et sans virgule, mais surmonté d'une flèche : $\overrightarrow{AA'}$ ou $\overrightarrow{BB'}$ ou $\overrightarrow{CC'}$, … et nous disons « vecteur AA', vecteur BB', ... ».

Les points A, B, C sont **les origines** des représentants, les points A', B', C' en sont **les extrémités**.

Normalement, on parle de **norme** pour un vecteur et de longueur pour un segment. La norme d'un vecteur $\vec{u}$ est la longueur du segment de l'un de ses représentants. On note $\|\vec{u}\|$.

Question 2

Sur la figure on a tracé un représentant d'un vecteur $\vec{u}$ et trois points A, B et C.
Construire les points D et E tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EA} = \vec{u}$.

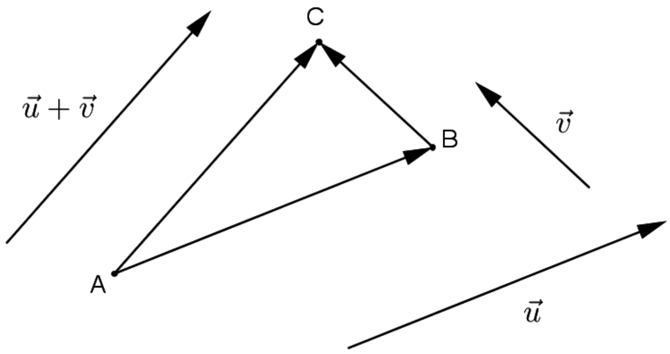


2. Somme de vecteurs

La somme de deux vecteurs donnés $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$. On note ce vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

Pour le représenter, à partir d'un point A du plan, on construit l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$. On notera B son image. Puis on construit l'image de B par la translation de vecteur $\vec{v}$. On notera C l'image de B.

Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est alors un représentant du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

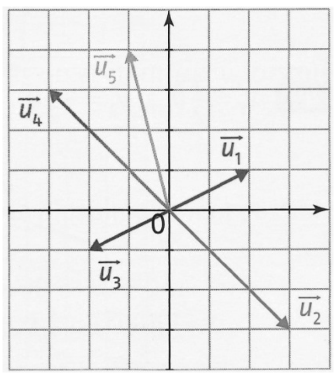


On obtient ainsi la **relation de Chasles** :

> Pour tous points A, B et C du plan, on a, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

◗ Question 3

Compléter les égalités suivantes à l'aide de la figure.



✍ $\overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_5} = \ldots\ldots.$

$\overrightarrow{u_1} + \cdots = \overrightarrow{u_5}$

$\ldots + \overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{u_4}$

$\overrightarrow{u_3} + \overrightarrow{u_1} = \ldots\ldots$

On a choisi de nommer le vecteur résultant, vecteur somme et donc d'utiliser le même symbole que pour l'addition des nombres, parce que cette opération (qui consiste à faire s'enchaîner deux translations) a les mêmes propriétés que l'addition pour les nombres.

> En effet, pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan, on a :
> - $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.
> - $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.
> - $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.
>
> Lorsque l'origine et l'extrémité d'un vecteur sont confondues, on dit que ce vecteur est le **vecteur nul** et on le note $\vec{0}$.
> Ce vecteur joue le même rôle que zéro dans l'addition.

D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
Pour cette raison,

> Le vecteur $\overrightarrow{A'A}$ est appelé **vecteur opposé** au vecteur $\overrightarrow{AA'}$.
> On le note aussi $-\overrightarrow{AA'}$.

Question 4

A, B, C, D, E sont des points du plan.

Démontrer que :
$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$
$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CD}$
$\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$

✍

> De manière générale, si $\vec{u}$ est un vecteur du plan, le vecteur noté $-\vec{u}$ est le vecteur qui a même longueur et même direction que le vecteur $\vec{u}$ mais pas le même sens.
> Et pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, on a $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

3. Multiplication d'un nombre réel par un vecteur

Nous avons défini dans la partie précédente, la somme de deux vecteurs.
Dans cette partie, nous allons définir la multiplication d'un nombre réel par un vecteur.

Attention, la multiplication entre deux vecteurs n'a jamais été définie. Évitez donc de le faire.
On ne peut pas diviser deux vecteurs entre eux non plus.

$\vec{u}$ étant un vecteur non nul, le vecteur $2\vec{u}$ est le vecteur $\vec{u}+\vec{u}$. C'est un vecteur de même direction et de même sens que $\vec{u}$, mais dont la longueur est le double de celle de $\vec{u}$.

Si k est un nombre entier positif non nul, le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur de même direction, de même sens que $\vec{u}$, mais dont la longueur est k fois celle de $\vec{u}$.

Si k est négatif, le sens de $k\vec{u}$ et celui de $\vec{u}$ sont opposés.

En généralisant à tout nombre réel non nul k, on obtient la définition suivante.

> On appelle **produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre k**, le vecteur noté $k\vec{u}$ tel que :
> - $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction,
> - Si $k>0$ alors $k\vec{u}$ a le même sens que $\vec{u}$ et sa longueur est le produit de la longueur de $\vec{u}$ par k,
> - Et si $k<0$ alors $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ sont de sens opposés et la longueur de $k\vec{u}$ est le produit de la longueur de $\vec{u}$ par $-k$.

Le résultat de la multiplication d'un nombre réel par un vecteur est un vecteur.
Le nombre réel se place toujours avant le vecteur.

> Par convention, $0\vec{u}=\vec{0}$ et $k\vec{0}=\vec{0}$.

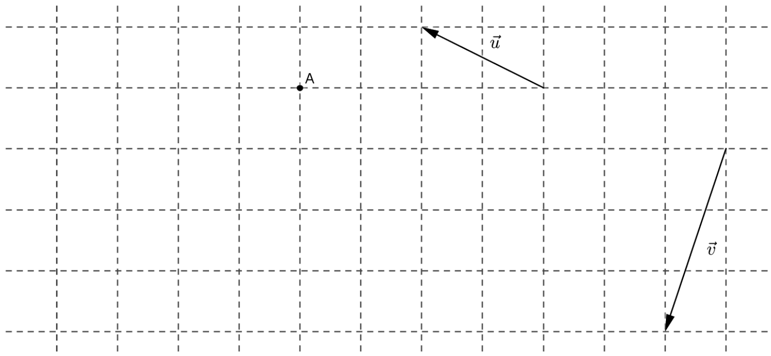
Cette multiplication a certaines propriétés de la multiplication de deux nombres réels, c'est-à-dire l'associativité et la distributivité sur l'addition.

En d'autres termes, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et quels que soient les nombres réels a et b,

- $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$
- $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
- $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$.

Question 5

Construire les points M et N définis par :
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{AN} = -\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$.



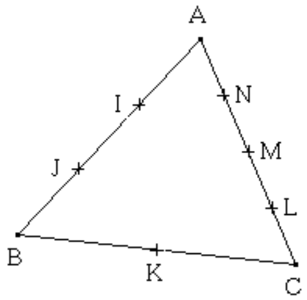
Exprimer, à l'aide d'un calcul, le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

✍

Chapitre 1. Les vecteurs

◗ Question 6

ABC est un triangle.
Les points I et J partagent le segment [AB] en trois segments de même longueur, le point K est le milieu du segment [BC] et les points L, M et N partagent le segment [AC] en quatre segments de même longueur.



Dans chaque cas, indiquer à l'aide de points de la figure, un vecteur égal à la somme proposée :

✍ $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} =$

$\overrightarrow{BC} + \frac{3}{4}\overrightarrow{CA} =$

$-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} =$

4. Coordonnées d'un vecteur

Vous avez vu en classe de seconde que, choisir un repère du plan revient à se donner trois points O, I et J non alignés.

À partir de maintenant, on notera $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{\jmath}$ et un repère sera noté $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

(OI) l'axe des abscisses sera aussi noté $(O, \vec{\imath})$ et (OJ) l'axe des ordonnées sera aussi noté $(O, \vec{\jmath})$.

Il existe trois types de repères.