I – Cours, savoir-faire et méthodes mathématiques

Les tests de calcul et de conditions minimales sont sans aucun doute les plus redoutés des candidats quels que soient leur profil et leur parcours académique… Et ce, à juste titre !
Composée de 15 questions à résoudre en 20 minutes, bien évidemment sans calculatrice, cette épreuve est exigeante : le programme qu'elle couvre est assez vaste, le chronomètre est impitoyable et son formalisme ajoute un stress supplémentaire.

Pourtant, cette épreuve est loin d'être insurmontable. Tentons de démystifier la fameuse partie Calcul.

1 – L'étendue du programme. Les notions mathématiques couvertes sont très denses, le programme officiel comprend en vrac :

- les entiers relatifs, les décimaux, les nombres réels ;
- les puissances et les racines carrées ;
- les pourcentages et les proportions ;
- les progressions arithmétiques et géométriques ;
- les identités remarquables ;
- les équations des premier et second degrés ;
- les systèmes d'équations à 2 et 3 inconnues ;
- l'analyse combinatoire ;
- les propriétés des droites parallèles (Théorème de Thalès) ;
- les propriétés des droites perpendiculaires (Théorème de Pythagore) ;
- les propriétés élémentaires du triangle, du cercle, du rectangle et du carré.

Dites-vous bien que toutes ces notions ont été abordées lors de vos études au collège. Les juristes, historiens et autres linguistes qui n'ont plus pratiqué les mathématiques depuis le lycée ont tous obtenu leur brevet des collèges … alors point d'inquiétude, il n'y a pas dans les tests de difficultés conceptuelles ou programmatiques. Avec une bonne remise à niveau, vous pourrez affronter tous types de questions. La difficulté réelle du test n'est pas là.

2 – Sans calculatrice. Cette contrainte doit être analysée correctement. « Sans calculatrice » signifie tout d'abord que les calculs ne seront jamais trop compliqués (on ne vous demande pas de devenir un génie du calcul et de déterminer de tête la racine cubique de 592 !). « Sans calculatrice » signifie aussi que les calculs doivent être résolus par le calcul mental ou – si cela est nécessaire – en les posant. Drogués à la calculatrice depuis bien longtemps, vous n'avez plus l'habitude du calcul mental et vous n'avez plus posé d'opération depuis le CM2 ! Le défi est donc, au cours de votre préparation, de retrouver une certaine habileté au calcul et, surtout, de gagner en rapidité.

RAPIDITÉ & HABILETÉ… C'est ce qui fera la différence le jour J !

3 – 15 questions, 20 minutes, le compte à rebours infernal. L'essentiel de la difficulté de la partie calcul réside dans la contrainte de temps qui vous est imposée. Vous le verrez, le temps devient très relatif lorsqu'on passe le TAGE MAGE®. Pourtant, cette contrainte n'est pas insurmontable à condition de garder la tête froide et de s'en tenir à quelques règles d'or.

Règle d'or : *Premièrement, n'espérez pas traiter la totalité des questions le jour J … et ce n'est pas grave ! Les bons candidats traitent entre 70% et 80% des questions, la moyenne se situant plutôt entre 40% et 50%. Je ne le répéterai jamais assez, il ne s'agit pas de répondre à toutes les questions mais à un maximum de questions dont vous êtes sûr à 99 %. Gardez à l'esprit qu'il s'agit de concours, la notation est relative. L'objectif est d'obtenir un meilleur score que les autres candidats. Vous disposez ainsi plutôt de 2 à 3 minutes par question.*

Règle d'or : *Deuxièmement, la rapidité s'acquiert avec l'entraînement. Comme un sprinter, vous devez multiplier les séances d'échauffement et d'entraînement au calcul mental et à la résolution de questions. Cet ouvrage sera votre produit dopant !*
De plus, nous le verrons dans la suite de cet ouvrage, il faut être malin le jour de l'épreuve, une approche tactique de chaque question est une des clefs du succès. Ne cherchez pas à traiter les questions que vous ne comprenez pas ou qui vous paraissent trop difficiles (une question facile rapporte autant de points qu'une question difficile), assurez-vous plutôt de répondre à toutes les questions que vous maîtrisez (parce que vous les avez déjà travaillées). Allez à l'essentiel. Nous le verrons, un même mécanisme mathématique peut donner lieu à une multitude de questions différentes. À vous de deviner, derrière l'énoncé, le mécanisme abordé. Ne vous laissez pas déconcentrer par la rédaction de la question, retrouvez très rapidement le principe mathématique dont il est question.

Règle d'or : *Enfin, le QCM a ceci de particulier que la réponse se trouve sous vos yeux, elle vous est donnée par le concepteur du test. Profitez-en. Vous le verrez, utiliser les réponses vous fera gagner un temps précieux.*

Pour terminer cette présentation, il faut rajouter que la préparation de la partie calcul n'est pas inutile pour votre avenir. La maîtrise du calcul et des bases de l'arithmétique est indispensable pour le manager que vous deviendrez. Vous solliciterez quotidiennement ces notions élémentaires dans votre vie professionnelle, quelle que soit votre future orientation. Un chef de produit ne peut se passer des fractions et des pourcentages pour déterminer ses parts de marché, un financier est amené à effectuer des calculs de marge ou de taux de rentabilité quotidiennement. Cette remise à niveau ou ce perfectionnement en mathématiques n'est pas un investissement vain, vous « rentabiliserez » pendant très longtemps le temps passé à cette préparation.

■■ I.1 – Reprenez les bases de l'arithmétique

Avant de vous lancer dans la résolution des premières questions, il n'est pas inutile de consacrer du temps à réviser les connaissances élémentaires. Bien évidemment, nous ne pouvons dans cet ouvrage reprendre l'ensemble des notions. Pour un cours complet, nous vous renvoyons à l'ouvrage « *Tests de logique mathématique et calcul* » (même éditeur, même auteur).

I.1.1 – Nombres, opérations basiques et divisibilité

Astuce : Il est important de différencier les **nombres** et les **chiffres**.
Les chiffres (nous utilisons les chiffres arabes) sont les symboles : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 qui, combinés, forment des nombres.
Dans un nombre, le chiffre le plus à droite est appelé l'unité, le suivant vers la gauche la dizaine, le suivant la centaine, le millier,… Si le nombre possède des décimales, on trouve de gauche à droite après la virgule, les dixièmes, les centièmes, les millièmes, …

<u>Priorités dans les calculs.</u>

$$a\times(b + c) = a\times b + a\times c$$

$$a\times(b - c) = a\times b - a\times c$$

$$(a + b)\times(c + d) = a\times c + a\times d + b\times c + b\times d$$

$$c\times(a + b) + d\times(a + b) = a\times(c + d) + b\times(c + d) = (a + b)\times(c + d)$$

<u>Les tables de multiplication.</u>
Je vous conseille vivement de **réapprendre (apprendre ?) vos tables de multiplication de 1 à 20**.

Recopiez-les, affichez-les, récitez-les… peu importe la méthode, sachez-les ! Comme il vous faut maîtriser l'alphabet avant d'écrire, les tables de multiplication sont la base de l'arithmétique.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	**1**	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	2	**4**	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40
3	3	6	**9**	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60
4	4	8	12	**16**	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80
5	5	10	15	20	**25**	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100
6	6	12	18	24	30	**36**	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120
7	7	14	21	28	35	42	**49**	56	63	70	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140
8	8	16	24	32	40	48	56	**64**	72	80	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160
9	9	18	27	36	45	54	63	72	**81**	90	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	**100**	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	**121**	132	143	154	165	176	187	198	209	220
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	**144**	156	168	180	192	204	216	228	240
13	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	**169**	182	195	208	221	234	247	260
14	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	**196**	210	224	238	252	266	280
15	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	**225**	240	255	270	285	300
16	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	**256**	272	288	304	320
17	17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	187	204	221	238	255	272	**289**	306	323	340
18	18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	198	216	234	252	270	288	306	**324**	342	360
19	19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	209	228	247	266	285	304	323	342	**361**	380
20	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320	340	360	380	**400**

<u>Divisibilité.</u> De nombreuses questions portent sur la divisibilité tant en calcul qu'en conditions minimales ou en logique, il faut donc parfaitement connaître les critères de divisibilité.

<u>Multiple.</u> On dit que N est un multiple de n si et seulement si N est divisible par n.

Méthode : critères de divisibilité

- **Critère de divisibilité par 2.**

Un nombre N est divisible par 2 si et seulement si N est pair, i.e. s'il se termine par 0, 2, 4, 6, 8.

- **Critère de divisibilité par 3.**

Un nombre N est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Ex. : 1 215 est divisible par 3 car $[1 + 2 + 1 + 5 = 9]$ et 9 est divisible par 3.

- **Critère de divisibilité par 4.**

Un nombre N est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4.

Ex. : 123 212 216 est divisible par 4 car 16 est divisible par 4.

- **Critère de divisibilité par 5.**

Un nombre N est divisible par 5 si et seulement si N se termine par 0 ou 5.

- **Critère de divisibilité par 6.**

Un nombre N est divisible par 6 si et seulement si N est à la fois divisible par 2 **<u>et</u>** par 3. Un nombre N est donc divisible par 6 s'il est pair et si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Ex. : 1 716 est divisible par 6 car il est pair, et $[1 + 7 + 1 + 6 = 15]$ or, 15 est divisible par 3.

- **Critère de divisibilité par 7.**

Un nombre N est divisible par 7 si et seulement si en calculant la somme de ses chiffres pris à partir de la droite multipliés respectivement par 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, … le résultat est un multiple de 7.

Ex. : 413 est divisible par 7 car $[3\times1 + 1\times3 + 4\times2 = 14]$ et 14 est divisible par 7.

Autre méthode pour un nombre à 3 chiffres : un nombre à trois chiffres CDU est divisible par 7 si et seulement si CD – 2U est divisible par 7.

Ex. : 413 est divisible par 7 car $[41 - 2\times3 = 35]$ et 35 est divisible par 7.

Inutile de vous faire remarquer que ces critères sont extrêmement compliqués à appliquer et que le meilleur moyen de savoir si un nombre est divisible par 7 est de connaître la table des 7 et de décomposer ce nombre en multiple(s) de sept.

Ex. : 413 peut se décomposer en multiples évidents de 7 : $[413 = 420 - 7]$
Donc, $413 = 6\times7\times10 - 7 = 59\times7$!

- **Critère de divisibilité par 8.**

Un nombre N est divisible par 8 si et seulement si le nombre formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8.

Ex. : 123 212 216 est divisible par 8 car 216 est divisible par 8.

- **Critère de divisibilité par 9.**

Un nombre N est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Ex. : 7 218 est divisible par 9 car $7 + 2 + 1 + 8 = 18$
et, 18 est divisible par 9.

- **Critère de divisibilité par 10.**

Un nombre N est divisible par 10 si et seulement si N se termine par 0.

- **Critère de divisibilité par 11.**

Un nombre N est divisible par 11 si et seulement si la différence entre la somme de ses chiffres de rang impair et la somme de ses chiffres de rang pair est divisible par 11 (et 0 est divisible par 11).
Pour un nombre à trois chiffres, la somme des unités et des centaines est égale au chiffre des dizaines (attention, c'est un critère de divisibilité et pas de non divisibilité).

Ex. : 495 est divisible par 11 car $4 + 5 = 9$
8 690 est un multiple de 11 car $(8 + 9) – (6 + 0) = 11$

- **Critère de divisibilité par 13** (*pour un nombre à trois chiffres*)**.**

Un nombre à trois chiffres CDU est divisible par 13 si et seulement si CD + 4×U est divisible par 13.

Ex. : 637 est divisible par 13 car $63 + 4×7 = 91$ et 91 est divisible par 13.

- **Critère de divisibilité par 17** (*pour un nombre à trois chiffres).*

Un nombre à trois chiffres CDU est divisible par 17 si et seulement si CD - 5×U est divisible par 17.

Ex. : 476 est divisible par 17 car $47 - 5×6 = 17$ et 17 est divisible par 17.

<u>Les nombres premiers.</u> Un nombre premier n'est divisible que par 1 et par lui-même.
Vous le constaterez lors des concours, de nombreuses questions portent sur les nombres premiers et par essence ils sont difficiles à repérer. C'est pourquoi il faut apprendre par cœur les plus usuels.

Les classiques : Apprenez-les.
2 ◆ 3 ◆ 5 ◆ 7 ◆ 11 ◆ 13 ◆ 17 ◆ 19 ◆ 23 ◆ 29 ◆ 31 ◆ 37 ◆ 41 ◆ 43 ◆ 47 ◆ 53 ◆ 59 ◆ 61 ◆ 67 ◆ 71 ◆ 73 ◆ 79 ◆ 83 ◆ 89 ◆ 97

Remarquez que 2 est le seul nombre premier pair.

Astuce. Comment savoir si un nombre est premier ?

Pour reconnaître un nombre premier, il faut essayer de le diviser par un nombre premier. L'astuce consiste à trouver une approximation de la racine carrée (R) du nombre et de vérifier si les nombres premiers inférieurs à la valeur approchée (R) divisent le nombre étudié. Si aucun des nombres premiers inférieurs à (R) ne divise ce nombre, alors il est premier.

<u>Décomposition en facteurs premiers.</u> Tout entier naturel supérieur à 1 peut être décomposé d'une manière unique en un produit de nombres premiers.

Ex. : la décomposition de 495 donne 11×3×3×5

Astuce. La technique de décomposition de nombres est **LA** méthode-clé pour gagner en rapidité de calcul. Pour simplifier une fraction, calculez mentalement une division ou une multiplication : la décomposition vous permet de travailler avec des nombres simples. Devenue un réflexe, cette méthode vous fera gagner un temps précieux le jour du concours. Entraînez-vous !

Plus petit commun multiple (PPCM). C'est le plus petit entier positif qui est multiple de deux ou plusieurs entiers d'une série donnée. Le PPCM doit être divisible par l'ensemble des entiers de la série, sa décomposition doit contenir exactement chacun des termes des facteurs de tous les entiers de la série.

Plus grand commun diviseur (PGCD). C'est le plus grand entier positif diviseur de deux ou plusieurs entiers sans reste. Le PGCD correspond au produit des facteurs qui sont communs dans les décompositions de tous les entiers de la série.

Principales opérations sur les nombres pairs et impairs.

+	**Pair**	**Impair**
Pair	Pair	Impair
Impair	Impair	Pair

×	**Pair**	**Impair**
Pair	Pair	Pair
Impair	Pair	Impair

Retenez que pour tout **n** entier pair ou impair : **n×Pair = Pair**
(Pair)^n = Pair
(Impair)^n = Impair

Astuce. En cas de doute… testez la parité avec les chiffres 1 et 2.
Ex. : 1×2 = 2 (pair) 1×1 = 1 (impair) …

I.1.2 – Puissances et racines carrées

Puissance. Une puissance indique combien de fois un nombre apparaît comme facteur d'un produit.
Dans l'expression b^p, b est la **base** et p la **puissance**. On dit que b est élevée à la puissance p ou que b est factorisé p fois.
Ex. : 12^6 = 12×12×12×12×12×12 (12 est factorisé 6 fois)

Remarques importantes.
- La puissance 2 se dit « au carré » et la puissance 3 se dit « au cube ».
- Un carré est toujours positif !
- Un nombre, qu'il soit positif ou négatif, élevé à une puissance paire est toujours positif.

- Un nombre élevé à une puissance impaire est toujours du signe de sa base.
- S'il n'y a pas de parenthèses, vous appliquez la puissance uniquement au nombre et non à son signe : $-2^2 = -4 \neq (-2)^2 = 4$
- La puissance d'un nombre compris entre 0 et 1 est toujours inférieure à sa base : $0{,}9^2 = 0{,}81$

Les formules classiques : Apprenez-les.

$$\boxed{x^0 = 1}$$

$$\boxed{x^1 = x}$$

$$\boxed{x^a \times x^b = x^{a+b}}$$

$$\boxed{x^a \times y^a = (x \times y)^a}$$

$$\boxed{(x^a)^b = x^{a \times b}}$$

$$\boxed{\frac{1}{x^a} = x^{-a}}$$

$$\boxed{\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}}$$

Astuce. Calculer facilement le carré d'un nombre.

Lorsque l'on connaît le carré d'un nombre, il est très facile de calculer le carré du nombre suivant ou du nombre précédent en utilisant les identités remarquables.
Souvenez-vous : $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$, il suffit donc de rajouter $(2a + 1)$ au carré de l'entier *a* pour calculer le carré de l'entier suivant !

Ex. : si vous connaissez $35^2 = 1\ 225$,
alors $36^2 = 35^2 + [2 \times 35 + 1] = 1\ 225 + 71 = 1\ 296$

De même, $(a - 1)^2 = a^2 - 2a + 1$, il suffit donc de rajouter $(-2a + 1)$ au carré de l'entier *a* pour calculer le carré de l'entier précédent !

Ex. : si vous connaissez $35^2 = 1\ 225$,
alors $34^2 = 35^2 + [-2 \times 35 + 1] = 1\ 225 - 69 = 1\ 156$

Astuce. Calculer le carré d'un nombre se terminant par 5.

Pour calculer le carré d'un nombre à deux chiffres se terminant par 5, il suffit de multiplier le chiffre des dizaines par son consécutif et de juxtaposer 25 au résultat obtenu.
Comprenez qu'un nombre à deux chiffres se terminant par 5 peut s'écrire de la forme *d5* (d matérialisant le chiffre des dizaines). Ce nombre peut se décomposer en $(10 \times d + 5)$ et,
$(10 \times d + 5)^2 = 100d^2 + 100d + 25 = 100 \times d \times (d + 1) + 25$

Ex. : pour calculer le carré de 65, multiplions le chiffre des dizaines par son consécutif : $6 \times 7 = 42$, puis, juxtaposons 25 au résultat : 42//25
Alors : $65^2 = 4225$

En combinant ces deux astuces, vous pourrez calculer en quelques secondes le carré d'un nombre à deux chiffres quel qu'il soit !