Chapitre 1
Exponentielle et logarithme népérien

L'étude de fonctions en Terminale est essentiellement basée sur deux fonctions : exponentielle et logarithme népérien.

Il faut donc connaître parfaitement leurs définitions et leurs propriétés pour pouvoir traiter les problèmes de BAC.

Les trois pages qui suivent constituent les connaissances essentielles. Elles permettront d'aborder les trois chapitres suivants qui traiteront de l'étude de fonctions.

1 La fonction exponentielle

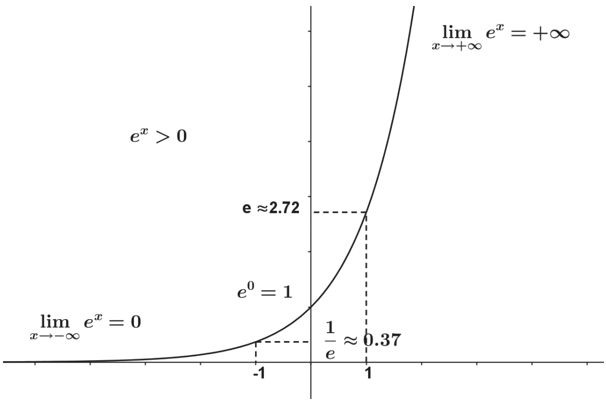
La définition

La fonction exponentielle $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$ est définie comme la fonction dont la dérivée est elle-même et dont l'image en 0 vaut 1.

$$\text{D'où } \left(e^x\right)' = e^x \text{ et } e^0 = 1.$$

Le graphique

Connaître le graphique de la fonction exponentielle permet de connaître ses principales caractéristiques.



On remarque deux notations importantes : $e^1 = e$ et $e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

Les propriétés algébriques

Pour $x, y \in \mathbb{R}$: $e^x \times e^y = e^{x+y}$; $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \,;\, \left(e^x\right)^n = e^{nx},\, n \in \mathbb{N}$$

Équations et inéquations

$e^x = e^y$ ssi $x = y$; $e^x > e^y$ ssi $x > y$

2 La fonction logarithme népérien

La définition

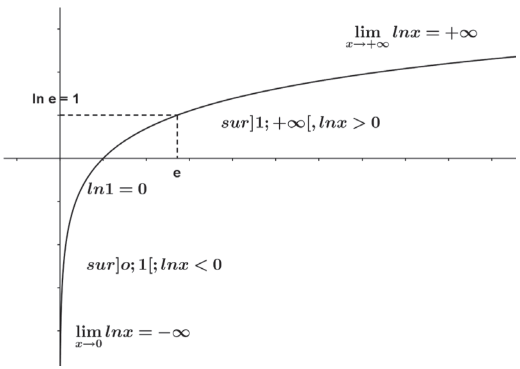
La fonction logarithme népérien $f(x) = \ln x$ sur $]0;+\infty[$ est définie comme la fonction donnant l'unique solution de l'équation $e^y = x$ pour $x > 0$.

D'où $e^y = x$ ssi $y = \ln x$.

On a aussi la dérivée de cette fonction : $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Le graphique

Connaître le graphique de la fonction logarithme népérien permet de connaître ses principales caractéristiques.



Les propriétés algébriques

Pour $x, y > 0$: $\ln(xy) = \ln x + \ln y$; $\ln \dfrac{1}{x} = -\ln x$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \ ; \ \left(\ln x^n\right) = n \ln x,\ n \in \mathbb{N}$$

Équations et inéquations

Pour $x, y > 0$: $\ln x = \ln y$ ssi $x = y$; $\ln x > \ln y$ ssi $x > y$

3 Les relations entre exponentielle et logarithme

Ces deux fonctions sont appelées des fonctions réciproques : l'une « élimine » l'autre et réciproquement. D'où les deux relations suivantes :

$$\ln\left(e^{x}\right) = x \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln x} = x \text{ pour } x > 0$$

Ces deux relations seront très utiles pour résoudre des équations et inéquations comportant un exponentielle ou un logarithme népérien :

- « pour faire disparaître un exponentielle à gauche, faire apparaître un logarithme à droite » :

$$e^{X} = a \text{ avec } a > 0 \text{ ssi } X = \ln a$$

- « pour faire disparaître un logarithme à gauche, faire apparaître un exponentielle à droite » :

$$\ln X = a \text{ ssi } X = e^{a}$$

Ces deux principes sont bien sûr aussi valables pour résoudre des inéquations.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par : $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{1-x}}$.

Démontrer que pour tout réel x de $[0;1]$, $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+e}$.

> ***Pour montrer que deux quantités A et B sont égales**, le principe est le suivant : partir de A pour aller à B ou partir de B pour aller à A. Pour les cas un peu plus compliqué, on peut aussi partir de A et de B pour arriver à une troisième quantité C.*
>
> $$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, shift right] \arrow[dr] & & B \arrow[ll, shift right] \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Réponse

■ Première solution : on part de A.

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{1-x}}=\frac{e^x}{e^x}\times\frac{1}{1+e^{1-x}}$$ *(on multiplie par e^x le haut et le bas)*

$$=\frac{e^x}{e^x+e^x\times e^{1-x}}=\frac{e^x}{e^x+e^{x+1-x}}$$ *(car $\boxed{e^x\times e^y=e^{x+y}}$)*

$$=\frac{e^x}{e^x+e^1}=\frac{e^x}{e^x+e}$$ *(car $\boxed{e^1=e}$)*

On a bien $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+e}$.

■ Deuxième solution : on part de B.

$$\frac{e^x}{e^x+e}=\frac{e^x}{e^x+e^1}=\frac{e^x(1)}{e^x\left(1+\dfrac{e^1}{e^x}\right)}$$ *(on factorise par e^x le haut et le bas)*

$$=\frac{e^x}{e^x}\times\frac{1}{1+e^{1-x}}=\frac{1}{1+e^{1-x}}=f(x)$$ *(car $\boxed{\dfrac{e^x}{e^y}=e^{x-y}}$)*

On a bien $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+e}$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[2;2e]$ par :

$$f(x) = x\ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2.$$

Justifier que les points $B(2e;2)$ et $I(2;0)$ appartiennent à la courbe C_f représentative de f.

*Un **point M(x;y) appartient à la courbe** représentant une fonction f ssi $f(x) = y$.*
Il faut donc faire l'image du x et comparer le résultat avec y.
On utilise ln*e = 1 et* ln*1 = 0.*

Réponse

$B(2e;2) \in C_f$?; $f(2e) = 2e \times \ln\left(\frac{2e}{2}\right) - 2e + 2$

$= 2e \times \ln e - 2e + 2 = 2e \times 1 - 2e + 2 = 2e - 2e + 2 = 2$

Le point B appartient donc bien à C_f.

$I(2;0) \in C_f$?

$f(2) = 2\ln\left(\frac{2}{2}\right) - 2 + 2 = 2\ln 1 = 2 \times 0 = 0$

Le point I appartient donc bien à C_f.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$.

Résoudre l'équation $f(x) = x$.

*Pour résoudre une **équation comportant un logarithme**, il faut isoler ce logarithme, puis utiliser l'exponentielle pour le faire disparaître.*

Réponse

$$\begin{aligned} f(x)=x \quad & \text{ssi} \quad x-\ln\left(x^2+1\right)=x \text{ ssi } -\ln\left(x^2+1\right)=0 \\ & \text{ssi} \quad \ln\left(x^2+1\right)=0 \\ & \text{ssi} \quad x^2+1=e^0 \ \textit{(disparition de } \ln \textit{ et apparition de e)} \\ & \text{ssi} \quad x^2+1=1 \text{ ssi } x^2=0 \text{ ssi } x=0 \end{aligned}$$

L'équation a donc pour solution $x = 0$.

Exercice 4

On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre ($\mu g.L^{-1}$), du médicament, au bout de t heures après administration par voie intraveineuse.

Le modèle mathématique est : $f(t)=20e^{-0,1t}$ avec $t \in [0;+\infty[$.

La concentration initiale du médicament est donc $f(0)=20\ \mu g.L^{-1}$.

1. La demi-vie du médicament est la durée (en heures) après laquelle la concentration du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale. Déterminer cette demi-vie $t_{0,5}$.

2. On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à $0,2\ \mu g.L^{-1}$. Déterminer le temps à partir duquel le médicament est éliminé. On donnera le résultat arrondi au dixième.

1. Réponse

Pour résoudre une équation comportant un exponentielle, il faut isoler l'exponentielle, puis utiliser le logarithme pour le faire disparaître.

La concentration initiale est de $20\ \mu g.L^{-1}$, il faut donc résoudre l'équation $f(t)=10$.

$$f(t)=10 \text{ ssi } 20e^{-0,1t}=10 \text{ ssi } e^{-0,1t}=\frac{1}{2}$$
$$\text{ssi } -0,1t=\ln\left(\frac{1}{2}\right) \textit{ (disparition de e et apparition de } \ln\textit{)}$$
$$\text{ssi } -0,1t=-\ln 2 \ (\textit{car } \boxed{\ln\frac{1}{x}=-\ln x}\ )$$
$$\text{ssi } 0,1t=\ln 2 \text{ ssi } t=\frac{1}{0,1}\ln 2 \text{ ssi } t=10\ln 2$$

On a donc la demi-vie $t_{0,5}=10\ln 2$.

2. Réponse

Pour résoudre une inéquation comportant un exponentielle, il faut isoler l'exponentielle, puis utiliser le logarithme pour le faire disparaître.

Il faut résoudre l'inéquation $f(t)<0,2$.

$$f(t)<0,2 \text{ ssi } 20e^{-0,1t}<0,2 \text{ ssi } e^{-0,1t}<0,01$$
$$\text{ssi } -0,1t<\ln 0,01 \textit{ (disparition de e et apparition de } \ln\textit{)}$$
$$\text{ssi } t>\frac{\ln 0,01}{-0,1}\approx 46,1 \textit{ (symbole inversé car on divise par un négatif)}$$

Le médicament sera donc éliminé environ au bout de 46,1 heures.

Exercice 5

La masse de bactéries est modélisée par la fonction *f* définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(t)=\frac{50}{1+49e^{-0,2t}}.$$

t représente le temps exprimé en jours et *f*(*t*) représente la masse, exprimée en kg, de bactéries au temps *t*.

On cherche à savoir au bout de combien de jours la masse de bactéries dépassera 30 kg. Résoudre l'inéquation d'inconnue *t* : $f(t)>30$.

En déduire la réponse au problème.