# CHAPITRE 1 QUELQUES ÉLÉMENTS MATHÉMATIQUES

## 1.1. Introduction

Ce chapitre est une introduction mathématique à des notions générales qui seront utiles pour différentes démonstrations présentes dans cet ouvrage. Dans un premier temps l'intégrale de Riemann est rapidement considérée pour aborder ensuite l'intégrale de Lebesgue. Cette autre façon d'aborder la notion d'intégrale est beaucoup plus générale et s'applique à un plus grand nombre de fonctions. Dans un second temps, des notions sur les distributions sont traitées. Les opérations possibles sur les distributions sont explicitées. Les distributions ont un rôle particulièrement important en traitement du signal. Par exemple l'impulsion de Dirac, l'échelon unité de Heaviside ou encore la fonction signe sont des distributions dites tempérées (applications linéaires et continues proposées par Laurent Schwartz).

## 1.2. Notions sur l'intégrale de Riemann

Considérons une fonction $f$ qui associe au nombre $x$ la valeur $f(x)$ sur l'intervalle fermé et borné $(a, b)$. Il est possible de définir $n$ intervalles sur le support $(a, b)$ à l'aide d'un certain nombre de points $x_i$ en considérant les conditions suivantes :

- $1 \leq i \leq n-1$
- $a < x_1$
- $x_i < x_{i+1}$
- $x_{n-1} < b$

L'intégrale simple définie sur le support $(a, b)$ peut être approchée par les sommes de Riemann, dans ce cas l'intégrale est une somme de rectangles comme l'indique (1.1).

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} f(\mu_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) \tag{1.1}$$

Avec $x_i < \mu_i < x_{i+1}$.

Lorsque $n \to \infty$ les longueurs des intervalles tendent vers 0 et $S$ tend vers l'intégrale de Riemann : $I = \int_a^b f(x)dx$.

Les sommes de Riemann sont utilisables pour définir des intégrales de fonctions continues sur un support $(a, b)$ et peuvent s'appliquer également à un nombre limité de fonctions discontinues.

## 1.3. Notions sur l'intégrale de Lebesgue

Afin de donner un sens plus général à la notion d'intégrale, Henri-Léon Lebesgue a considéré que l'intégrale indéfinie $F$ est représentée par un ensemble de valeurs dans lequel on peut trouver n'importe quelle intégrale définie : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Lebesgue considère que l'abscisse $x$ de (1.1) définissant la somme de Riemann a 3 rôles bien définis :

- les points font partie d'un domaine $D$ composé de sous ensembles $D_i$ ;
- un point $P_i$ appartient à $D_i$ ;
- on peut définir une mesure $m_i$ associée à chaque sous ensemble $D_i$.

Avec ces hypothèses la somme de Riemann définie par (1.1) devient :

$$S = \sum_i f(P_i) \cdot m_i \tag{1.2}$$

Avec $P_i \in D_i$.

La limite $L(D)$ de cette somme, quand elle existe, est une fonction de domaine intégrable de la fonction de point $f(P)$.

Lebesgue groupe des valeurs voisines de $f(x)$ dans un petit intervalle $y_i < f(x) < y_{i+1}$.

On associe à cet intervalle, une mesure $m_i$ comme l'indique (1.3).

$$S = \sum_i \psi_i \cdot m_i \tag{1.3}$$

Avec $y_i < \psi_i < y_{i+1}$.

Lebesgue considère comme *mesurables* les fonctions $f$ telles que le domaine défini par $a < x < b$, $0 < y < f(x)$ possèdent une mesure.

Ce concept très général inclut toutes les fonctions de Riemann et bien d'autres fonctions.

Les fonctions $f$ intégrables au sens de Lebesgue ou sommables associent un nombre noté : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ou $\int_R f(x)dx$ ou $\int f(x)dx$ ou encore $\int f$.

Pour expliquer sa théorie Lebesgue aurait tenu le propos suivant :

« *Je dois payer une certaine somme ; je fouille dans mes poches et j'en sors des pièces et des billets de différentes valeurs. Je les verse à mon créancier dans l'ordre où elles se présentent jusqu'à atteindre le total de ma dette. C'est l'intégrale de Riemann. Mais* *je peux opérer autrement. Ayant sorti tout mon argent, je réunis les billets de même valeur, les pièces semblables, et j'effectue le paiement en donnant ensemble les signes monétaires de même valeur. C'est mon intégrale.* ».

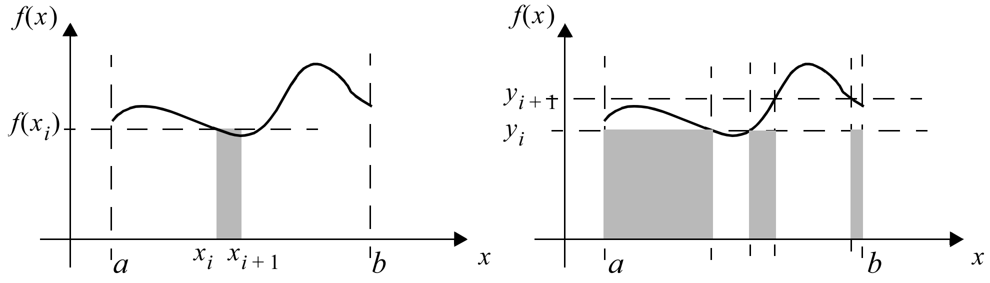


*Figure 1.1 : les intégrales de Riemann (à gauche) et de Lebesgue (à droite)*

La figure 1.1 compare le principe de l'intégrale de Riemann et celle de Lebesgue.

Sur la figure de gauche, Riemann associe à l'intervalle $[x_{i+1} - x_i]$ une valeur $f(x_i)$. À droite, Lebesgue associe à l'intervalle $y_i \leq f(x) < y_{i+1}$ l'ensemble des mesures correspondantes.

## 1.4. Intégrale en partie principale de Cauchy

Cette intégrale permet d'associer une valeur à certaines intégrales qui ne sont pas définies.

Considérons une fonction $f(x)$ non-bornée en $x = \alpha$, telle que :

$$y(\varepsilon) = \int_a^{\alpha - \varepsilon} f(x)dx + \int_{\alpha + \varepsilon}^b f(x)dx \quad \varepsilon > 0 .$$

Si $y(\varepsilon)$ tend vers une limite $L$, alors $f(x)$ est intégrable au sens de la valeur principale de Cauchy : $y(\varepsilon) = vp\left[\int_a^b f(x)dx\right]$. De même : $vp\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right] = \lim\limits_{N \to \infty} \int_{-N}^{+N} f(x)dx$.

*Exemple 1.1. : calcul d'une intégrale en partie principale de Cauchy.*

Considérons la fonction $y = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$, cette intégrale n'est pas définie au point d'abscisse $x = 0$.

Par contre, la fonction est intégrable au sens de la valeur principale de Cauchy : $vp\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx\right] = \lim_{a \to 0^+}\left(\int_{-1}^{-a}\frac{dx}{x} + \int_{a}^{1}\frac{dx}{x}\right) = 0$. La valeur $a$ est choisie la plus petite possible sans jamais prendre la valeur 0 (figure 1.2).

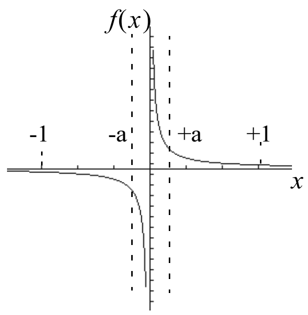


*Figure 1.2 : la fonction $f(x) = 1/x$ tend vers $\pm\infty$ au point d'abscisse 0*

## 1.5. Espace fonctionnel

On désigne par espace fonctionnel, un ensemble de fonctions $F$ possédant une structure d'espace vectoriel. Dans un tel système, toute combinaison linéaire de 2 fonctions $f1$ et $f2$ de $F$ appartient également à $F$.

Quel que soit $\lambda 1$ et $\lambda 2$ complexes, la relation suivante est vérifiée :

$$\begin{array}{l} f1 \in F \\ f2 \in F \end{array} \quad \Rightarrow \quad \lambda 1 f1 + \lambda 2 f2 \in F.$$

On considère que l'on définit une *fonctionnelle* sur un espace $F$ si l'on peut associer un nombre complexe $T(f)$ à toute fonction de $F$. On utilise la notation de Laurent Schwartz : $(T, f)$ pour associer le nombre complexe $T(f)$ à la fonction $f$ par la fonctionnelle $T$.

## 1.6. Les distributions au sens de Laurent Schwartz

Considérons l'espace vectoriel $D$ des fonctions indéfiniment dérivables, on appelle *distributions*, les fonctionnelles linéaires, continues sur $D$. Ce type de distributions est appelé *distributions tempérées au sens de L. Schwartz.*

### 1.6.1. Distributions associées aux fonctions localement intégrables

La fonction $x(t)$ est localement sommable si elle est intégrable au sens de Lebesgue sur tout intervalle borné.

À la fonction $x(t)$ correspond une distribution $T_x$.

Quel que soit $\varphi(t) \in D$, la distribution $T_x$ est donnée par (1.4).

$$T_x(\varphi) = (T_x, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\varphi(t)dt \tag{1.4}$$

Par abus de notation on note les fonctions localement sommables comme des distributions :

$$(x(t), \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\varphi(t)dt \tag{1.5}$$

### 1.6.2. La distribution de Dirac

La distribution de Dirac que l'on note $\delta$ est une distribution singulière par opposition aux distributions régulières précédentes. Cette distribution a les propriétés suivantes :

pour $\varphi(t) \in D$ $\quad (\delta, \varphi) = \varphi(0)$.

D'une manière générale, la distribution de Dirac au point $a$ est telle que :

pour $\varphi(t) \in D$ $\quad (\delta_a, \varphi) = \varphi(a)$.

Par abus de notation, on note :

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\varphi(t)dt \tag{1.6}$$

$$\varphi(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-a)\varphi(t)dt \tag{1.7}$$

### 1.6.3. Opérations sur les distributions

#### 1.6.3.1 Combinaison linéaire de distributions

Quel que soit $\varphi(t) \in D$ alors l'équation 1.8 donne la condition de linéarité.

$$(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2, \varphi) = \lambda_1(T_1, \varphi) + \lambda_2(T_2, \varphi) \tag{1.8}$$

#### 1.6.3.2 Dérivation (cas général)

Soit $f'$ la fonction dérivée de $f$ et $T'$ la distribution dérivée de $T$.

Quel que soit $\varphi(t) \in D$, on peut écrire l'équation suivante :

$$((T_f)', \varphi) = (T_{f'}, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\varphi(t)dt.$$

Et en intégrant par partie cette dernière équation :

$$((T_f)', \varphi) = [f(t)\varphi(t)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)dt = -(T_f, \varphi').$$

$\varphi(t)$ étant à support borné $\varphi(\pm\infty) = 0$. De même :

$$(T', \varphi) = -(T, \varphi') \tag{1.9}$$

$$(T'', \varphi) = -(T', \varphi') = (T, \varphi'') \tag{1.10}$$

$$(T^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (T, \varphi^{(n)}) \tag{1.11}$$

*L'équation 1.11 explicite que toute distribution est indéfiniment dérivable.* Cette propriété remarquable sera largement utilisée dans cet ouvrage.

#### 1.6.3.3 Dérivation de fonctions discontinues

Il est intéressant de considérer les conditions nécessaires pour dériver des fonctions discontinues. Considérons une fonction $f(t)$ discontinue en $t = t_0$ comme l'indique la figure 1.3. Avec : $f(t_0^-) = a$ et $f(t_0^+) = b$. La hauteur de la discontinuité est $h = b - a$.

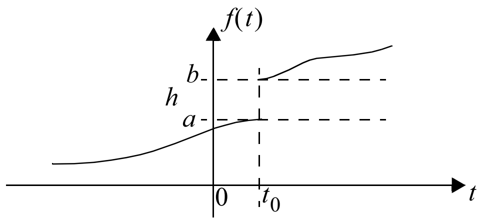


*Figure 1.3 : une fonction discontinue*

Décomposons $f(t)$ en une somme d'une fonction continue, $f_{t \neq t_0}(t)$ et d'une fonction discontinue $g(t)$.

$g(t) = h \cdot u(t - t_0)$ avec $u(t)$ la fonction échelon de Heaviside.

$f(t) = f_{t \neq t_0}(t) + h \cdot u(t - t_0)$ . En dérivant $f(t)$, il vient immédiatement, compte tenu que la dérivée de la fonction de Heaviside est une fonction de Dirac :

$$f'(t) = f'_{t \neq t_0}(t) + h \cdot \delta(t - t_0) \tag{1.12}$$

Cette dernière équation est particulièrement utile pour déterminer la dérivée d'une fonction comportant une discontinuité.

# CHAPITRE 2 CLASSIFICATION DES SIGNAUX

## 2.1. Introduction

La classification des signaux en catégories même si elle peut sembler, à première vue, théorique et d'un intérêt limité, présente cependant quelques avantages. L'idée est que pour chaque rubrique de signaux on définira des traitements bien particuliers. Il semble assez intuitif que les signaux à caractère déterministe (ou certains) soient différents des signaux dits aléatoires (ou non-prévisible). Chacune de ces catégories demande des traitements spécifiques.

Un autre type de classification est possible selon que l'on soit capable de définir une puissance ou une énergie d'un signal. Les signaux de type distribution forment également une catégorie particulière.

Dans une seconde partie, on montre l'intérêt d'utiliser une représentation vectorielle des signaux dans une base orthonormée. Finalement, on démontrera le fameux théorème de Parseval, qui explicite que l'énergie d'un signal est égale à la somme des énergies de ses composantes et ne dépend pas de son mode de représentation. Cet énoncé est largement utilisé dans cet ouvrage.

## 2.2. Classification déterministe-aléatoire

### 2.2.1. Déterministes

Ce sont les signaux dont l'évolution en fonction du temps est prévisible par un modèle mathématique approprié (signaux de test, d'étalonnage, etc.) sont à caractère déterministe.

### 2.2.2. Aléatoires

Ce sont les signaux qui ont un caractère non-reproductible et imprévisible. Par exemple, les signaux issus de capteurs ou encore la parole sont à caractère aléatoire.

## 2.3. Classification énergétique

### Notions d'énergie et de puissance d'un signal

Quel que soit le signal, on peut définir l'énergie du signal (si elle existe) par (2.1).

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \tag{2.1}$$

La puissance moyenne (si elle existe) peut être définie par (2.2).

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt \tag{2.2}$$

*Remarque*

• Les signaux tels que $0 < E_x < \infty$ sont des signaux à énergie finie $(P_x = 0)$. Par exemple, les signaux transitoires sont des signaux à énergie finie ;

• Les signaux tels que $0 < P_x < \infty$ sont des signaux à puissance moyenne finie $(E_x = \infty)$. Par exemple, les signaux permanents, comme les signaux périodiques ou encore les signaux aléatoires permanents, sont à puissance moyenne finie.

L'équation 2.3 donne une autre définition de la puissance moyenne.

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T - t_0} \int_{t_0}^{T} |x(t)|^2 dt \tag{2.3}$$

## 2.4. Autres types de signaux

### 2.4.1. La distribution de Dirac

Une propriété fondamentale de la distribution de Dirac est donnée par la formule suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \tag{2.4}$$

La particularité de cette distribution est d'avoir une valeur unique ($\infty$) au point d'abscisse 0.

On peut imaginer de nombreuses représentations de la distribution de Dirac. La figure 2.1 propose deux représentations possibles. Dans ce cas, on suppose que : $\varepsilon \to 0$. On remarquera que l'intégrale (2.4) est bien vérifiée.

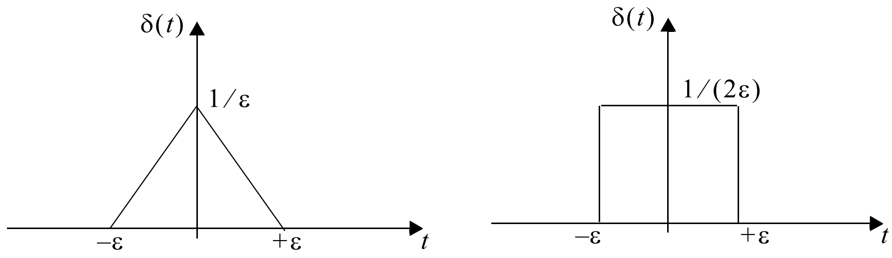


*Figure 2.1 : impulsion de Dirac*