

Chapitre I

NON LINÉARITÉ GÉOMÉTRIQUE DES STRUCTURES



Figure I.1 : Machine hydraulique de compression de l'ENSTA Bretagne.

Ce chapitre aborde la modélisation des structures « élancées » pouvant subir de grands déplacements et/ou rotations dans le domaine des petites ou grandes déformations élastiques et des chargements quasistatiques. Les développements concernant les formulations des grandes transformations de la matière y seront très pauvres et réduits au strict nécessaire. La lectrice/teur pourra se référer à [1], [2] et [3] pour un approfondissement de ces questions. Dans toute la suite du chapitre on utilisera la déformation de Green–Lagrange.

On distinguera deux phénomènes mécaniques associés à ce type de modélisation, à savoir la non linéarité globale du comportement de la structure (déplacements, déformations et contraintes) vis à vis du paramètre de chargement, d'une part et les conditions d'instabilité (point limite ou bifurcation d'équilibre en vitesse [4]) d'autre part. Ces dernières apparaissent généralement dans des zones de « compression ». Pour les points limites avec des déplacements finis on parle souvent de claquage. En ce qui concerne les bifurcations d'équilibre en vitesse, elles sont classiquement dénommées selon leur nature, pour les poutres par flambement (compression) ou déversement (flexion et torsion) et pour les plaques par

voilement (compression ou cisaillement plan).

On ne traitera pas dans ce chapitre de la classification des phénomènes post-instabilité, ni de leur résolutions (Riks, MAN ..). Pour cela on pourra consulter [5], [6], [7] et [8].

1. – Présentation heuristique

Dans la continuité du cours [9], l'effet induit par les déplacements de la poutre sur son énergie de déformation sera pris en compte. On gardera une présentation pragmatique de ces phénomènes dans un premier temps. Un développement plus général sera effectué dans la suite du présent chapitre.

Le flambement se rencontre lorsqu'une poutre droite est sollicitée en compression suivant son axe \underline{X} de référence. Il s'agit d'une bifurcation d'équilibre dont l'existence est liée à des valeurs d'effort de compression discrètes. Lorsque ces dernières sont atteintes, il existe deux champs de vitesses solutions pour la poutre. Le champ « trivial ou canonique » correspond à une déformation de contraction longitudinale de la poutre suivant l'axe \underline{X} . Le second est la somme du premier et d'un champ de vitesses orthogonales à \underline{X} .

Cela étant, ces conditions générales de bifurcation d'équilibre ne seront pas décrites rigoureusement. On ne traitera que des cas particuliers qui, néanmoins, seront très largement représentatifs de ce phénomène. En particulier, les poutres seront considérées à axes principaux constants. Soit, à titre d'introduction, le cas de la charge excentrée, présenté ci-après.

1. 1. – Cas de la charge excentrée

Il s'agit d'une poutre droite en liaisons sphère–plan chargée à ses deux extrémités par un effort de compression longitudinal dont les points d'applications sont excentrés par rapport à l'axe \underline{X} de référence (Fig. I.2).

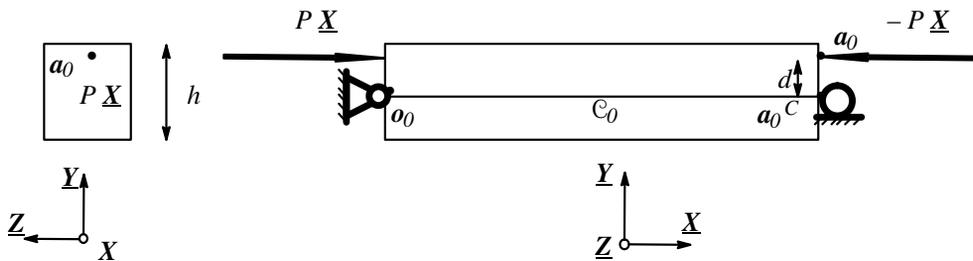


Figure I.2 : Cas de la charge excentrée, configuration initiale.

Dans cet exemple, l'effort ponctuel P est strictement positif. Il est clair que la poutre se déforme alors de la façon suivante (Fig. I.3) :

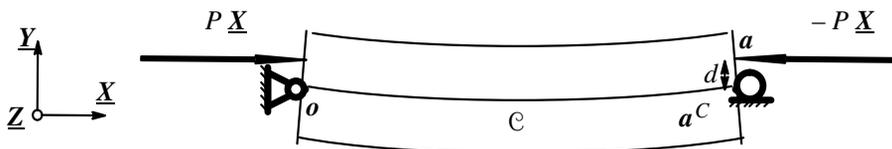


Figure I.3 : Cas de la charge excentrée, configuration déformée.

On appelle L la longueur de la poutre et I son inertie par rapport à l'axe Z . On rappelle alors que le déplacement U_y de chaque point de l'axe X de référence est donné par l'équation de la déformée [9], à savoir :

$$\hat{U}_y''(x_0) = \frac{M_z}{E I} \quad (1)$$

Or on souhaite ici tenir compte de la déformée de la poutre pour calculer son énergie de déformation, donc son effort normal N ainsi que le moment fléchissant M_z . Ces derniers valent alors respectivement $-P$ et $(d - U_y)P$. De ce fait, l'équation (1) devient :

$$\hat{U}_y''(x_0) + \frac{P}{E I} \hat{U}_y(x_0) = \frac{d P}{E I} \quad (2)$$

Cette équation différentielle du second ordre a pour solution :

$$\begin{cases} \hat{U}_y(x_0) = d + A \cos(\omega x_0) + B \sin(\omega x_0) \\ \omega = \sqrt{\frac{P}{E I}} \end{cases} \quad (3)$$

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions aux limites, à savoir que U_y est nul en $x_0 = 0$ et en $x_0 = L$. Finalement il vient :

$$\begin{cases} \hat{U}_y(x_0) = d \left\{ [1 - \cos(\omega x_0)] - \frac{[1 - \cos(\omega L)]}{\sin(\omega L)} \sin(\omega x_0) \right\} \\ \omega = \sqrt{\frac{P}{E I}} \end{cases} \quad (4)$$

Notons qu'il existe des cas particuliers où $\omega L = (2n + 1)\pi$ ($n \in \mathbb{N}$) pour lesquels il n'y a pas de solution au problème, soit avec :

$$P_n = \left[\frac{(2n + 1)\pi}{L} \right]^2 E I \quad (5)$$

Pour ces valeurs discrètes de P , le déplacement U_y n'est plus défini.

On souhaite étudier l'évolution de la flèche f de la poutre en fonction de P (on se limitera à des valeurs de P comprises entre 0 et P_0) pour différentes valeurs de d . La flèche de la poutre correspond à la valeur absolue du déplacement en $x_0 = L/2$, soit après calcul :

$$\begin{cases} f = d \frac{[1 - \cos(\frac{\omega L}{2})]}{\cos(\frac{\omega L}{2})} \\ \omega = \sqrt{\frac{P}{E I}} \end{cases} \quad (6)$$

Si l'on trace P en fonction de f , on obtient les allures de courbes suivantes (Fig. I.4) :

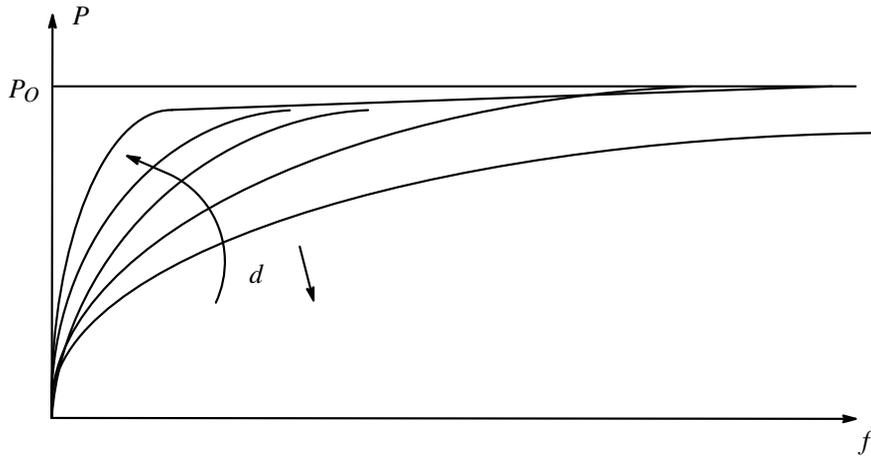


Figure I.4 : Allures des courbes P fonction de f selon le paramètre d .

On note sur la figure précédente que plus d est faible, c'est à dire plus le point d'application de l'effort de compression est proche de l'axe de référence \underline{X} , plus la réponse en déplacement est « instable ». En effet lorsque d est proche de 0, on obtient une augmentation brutale de la flèche pour un faible accroissement de l'effort de compression juste avant d'atteindre la valeur P_0 . Ce phénomène laisse présager le cas limite où $d = 0$.

1. 1. 1. – Cas élémentaire de flambement

Si l'on reprend l'exemple de la charge excentrée étudiée précédemment avec cette fois-ci $d = 0$, la solution (3) devient :

$$\begin{cases} \hat{U}_y(x_0) = A \cos(\omega x_0) + B \sin(\omega x_0) \\ \omega = \sqrt{\frac{P}{E I}} \end{cases} \quad (7)$$

Les constantes A et B sont toujours déterminées par les conditions aux limites, à savoir que U_y est nul en $x_0 = 0$ et en $x_0 = L$. Finalement il vient :

$$\begin{cases} \hat{U}_y(x_0) = B \sin(\omega x_0) \\ \omega = \sqrt{\frac{P}{E I}} \\ B \sin(\omega L) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Ce système d'équations possède uniquement la solution « triviale » $U_y = 0$ sauf pour $\omega L = k \pi$ ($k \in \mathbb{N}$), soit :

$$P_k = \left[\frac{k \pi}{L} \right]^2 E I \quad (9)$$

L'effort P_k est couramment dénommé charge critique d'Euler d'ordre k . Pour ces valeurs discrètes d'effort le déplacement U_y est indéterminé, mais est proportionnel à une forme précise de déformée ($\hat{U}_y(x_0) = \sin\left(k \pi \frac{x_0}{L}\right)$) que l'on appellera mode de flambement d'ordre k (Fig. I.5).

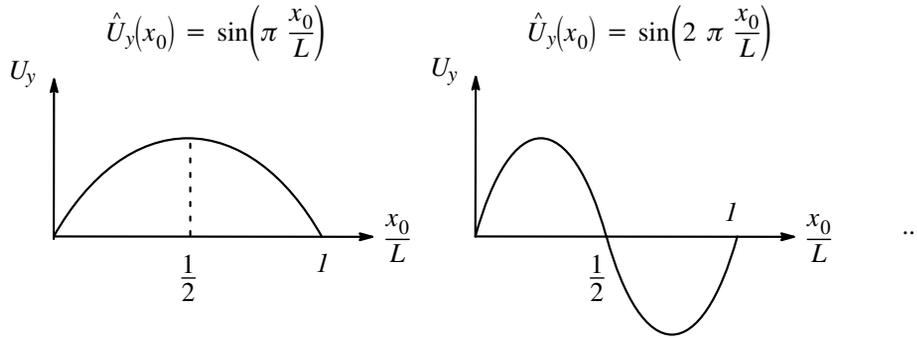


Figure I.5 : Modes de flambement élémentaire d'ordre 1, 2, ...

Remarques

► Le déplacement de tout point de la poutre dans la direction \underline{X} est quant à lui parfaitement défini quelle que soit la valeur de P . En effet l'effort normal N dans la poutre est constant et vaut $-P$; ce qui permet d'obtenir grâce à l'équation de la déformée [9] et en notant A_0 l'aire de la section droite supposée constante le long de la poutre :

$$\hat{U}_x'(x_0) = -\frac{P}{E A_0} \quad (10)$$

Après intégration et compte tenu des conditions aux limites, il vient finalement :

$$\hat{U}_x(x_0) = -\frac{P}{E A_0} x_0 \quad (11)$$

► On s'aperçoit (9) que la grandeur géométrique qui conditionne le flambement est I/L^2 . De plus le raisonnement qui a été tenu faisait intervenir le moment fléchissant suivant l'axe \underline{Z} et par conséquent les déplacements suivant l'axe \underline{Y} . Cependant on peut reprendre cette analyse de manière pratiquement identique, mais en considérant cette fois-ci le moment fléchissant suivant l'axe \underline{Y} et par conséquent les déplacements suivant l'axe \underline{Z} . Ainsi la charge minimale de flambement est donnée en fait par :

$$P_1 = \pi^2 E \min_{\{y, z\}} \left\{ \frac{I_y}{L^2}, \frac{I_z}{L^2} \right\} \quad (12)$$

1. 1. 2. – Autres cas, notion de longueur de flambement

Grâce à des analogies avec le cas du flambement élémentaire, on peut en déduire les charges critiques de flambement suivantes (Fig. I.6 et I.7) :

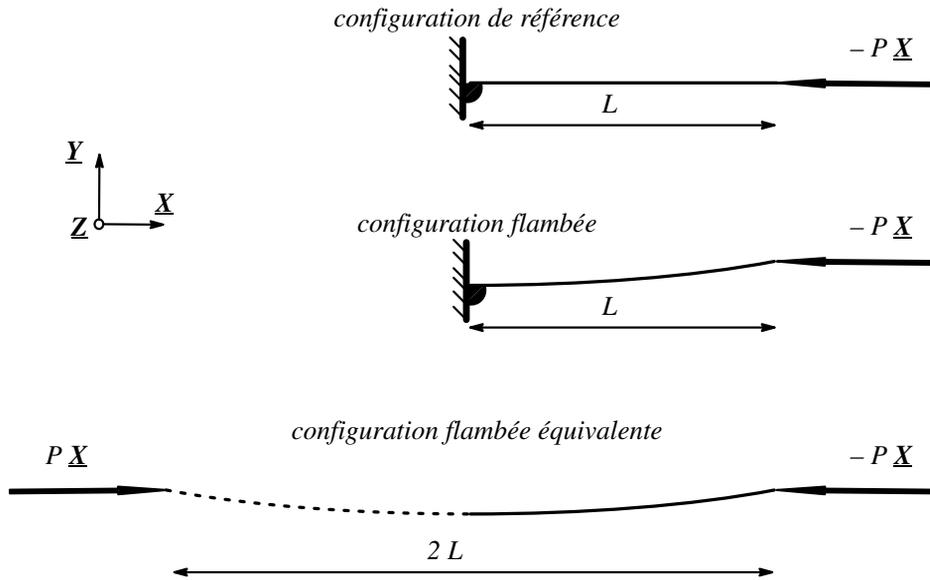


Figure I.6 : Premier mode de flambement d'une poutre console

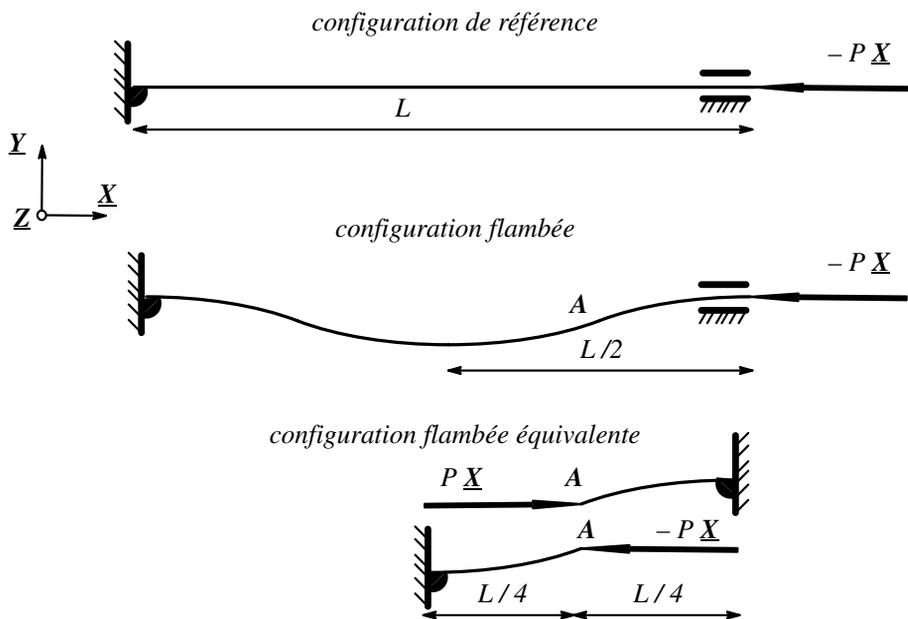


Figure I.7 : Premier mode de flambement d'une poutre fixée aux deux bouts

Remarque

► La construction de la configuration flambée équivalente a été possible en Fig. I.7 car le moment en A est nul.

Si l'on se sert de la charge critique d'Euler du premier ordre pour le cas du flambement élémentaire, et que l'on note L_f (longueur de flambement) la longueur de la poutre dans ce cas, il suffit alors de remplacer L_f par $2L$ pour le cas de la poutre console et L_f par $L/2$ pour le cas de la poutre fixée aux deux extrémités. Ainsi on obtient d'après (12), pour le cas de la poutre console :

$$P_1 = \frac{\pi^2}{4} E \min_{\{y, z\}} \left\{ \frac{I_y}{L^2}, \frac{I_z}{L^2} \right\} \quad (13)$$

pour le cas de la poutre fixée aux deux extrémités :

$$P_1 = 4 \pi^2 E \min_{\{y, z\}} \left\{ \frac{I_y}{L^2}, \frac{I_z}{L^2} \right\} \quad (14)$$

En conclusion, on peut dire que la sensibilité au flambement est fortement dépendante des conditions aux limites cinématiques imposées à chaque extrémité de la poutre.

2. – Non linéarité globale du comportement de la structure

Afin d'illustrer le phénomène de non linéarité du comportement global d'une structure à comportement matériau élastique linéaire, nous allons d'écrire une petite expérience utilisée comme TP. Il s'agit de la flexion d'une plaque en alliage d'aluminium de 2 mm obtenue après fraisage d'une plaque plus épaisse (Fig I.8).

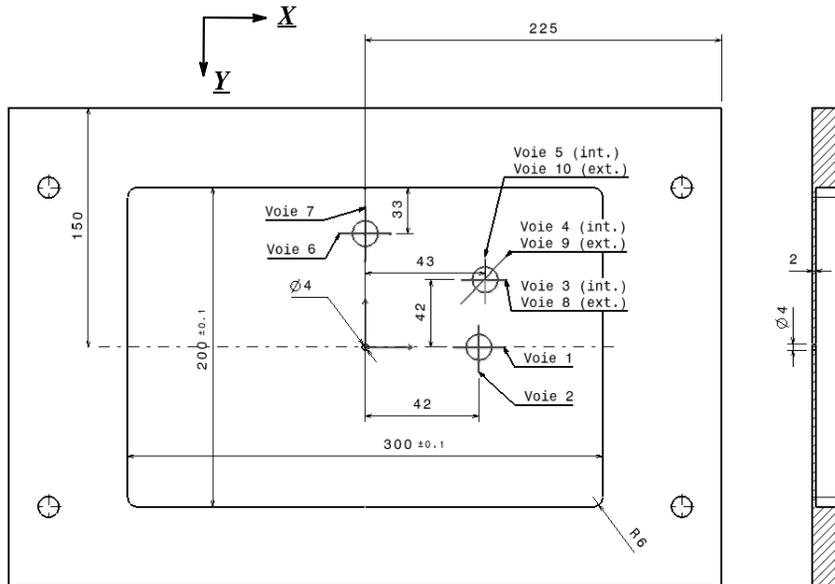


Figure I.8 : Dessin de définition de la plaque (cotes en mm)

Deux simulations numériques de cette expérience (quart de plaque) ont été réalisées avec le code aux éléments finis ABAQUS/Standard™, une en linéaire géométrique et l'autre

en non linéaire géométrique. Le comportement matériau de la plaque d'épaisseur 2 mm est élastique linéaire isotrope de module d'Young 70 GPa et de coefficient de Poisson 0,3. Les bords sont considérés comme encastés dans la sur-épaisseur. Un corps rigide encasté au bord du trou central (diamètre 4 mm) de la plaque est piloté en translation selon $-Z$. Le maillage comporte environ 30000 éléments coque Midlin linéaires triangulaires. La contrainte de von Mises la plus élevée (centre de la plaque) ne dépasse pas 135 MPa. La figure I.9 fournit le résultat de ces deux simulations en terme d'effort de chargement en fonction du déplacement (valeur absolue) au centre de la plaque suivant Z .

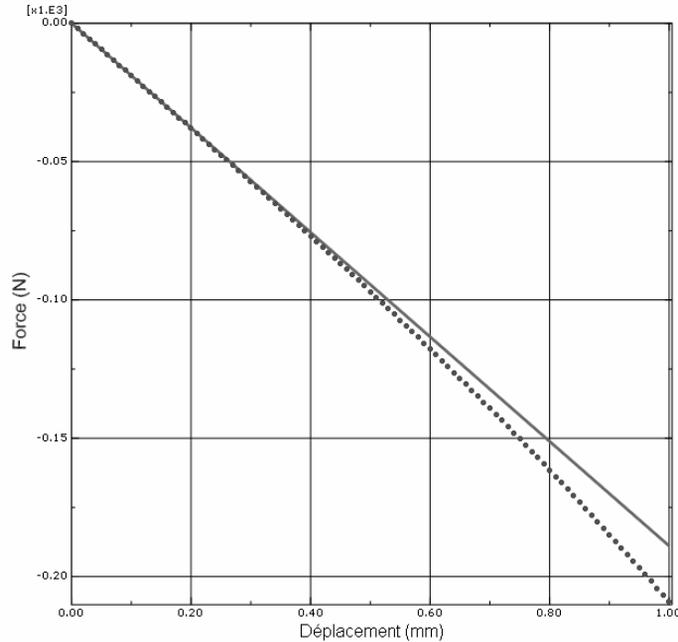


Figure I.9 : Résultat ABAQUS/Standard™ en linéaire (ligne continue) et non linéaire géométrique (pointillés) de l'effort de chargement en fonction du déplacement (valeur absolue) au centre de la plaque suivant Z .

On constate donc une influence non négligeable du type de modélisation (prise en compte des non linéarités géométriques ou pas) sur la réponse globale de la structure. A la lumière de ce résultat on peut conserver à l'esprit qu'une simulation linéaire (plus simple et moins coûteuse en temps calcul qu'une simulation non linéaire) reste acceptable à environ 10% près pour des rapports entre déplacement maximal et longueur caractéristique de la structure inférieurs à environ 5%. Il faut cependant prendre garde à ne pas généraliser cette « règle » en particulier pour les structures « minces » où le rapport entre épaisseur et déplacement maximal peut jouer un rôle prédominant. Ces aspects seront à nouveau discutés par la suite.

Remarques

► On peut tenter une explication physique de l'augmentation de raideur avec le déplacement. En effet les moments de flexion (par unité de longueur) « majoritaires » au centre de la plaque sont ceux issus de l'effort de réaction suivant Z . Par contre les moments de flexion (par unité de longueur) « minoritaires » issus de la composante d'encastrement, suivant X sur les petits côtés de la plaque et suivant Y sur les grands côtés de la plaque, sont de