

Chapitre I

PREMIERS ÉLÉMENTS DE MÉCANIQUE

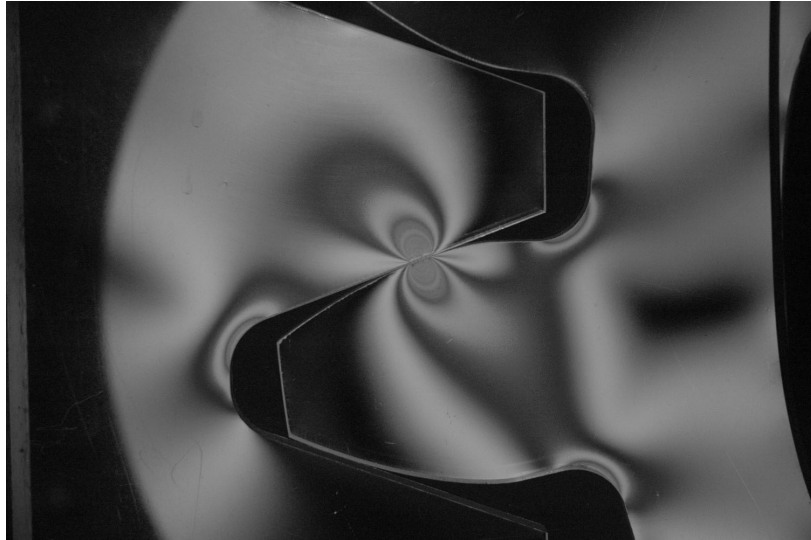


Figure I.1 : Banc de photoélasticimétrie de l'ENSTA Bretagne.

Ce chapitre présente les notions de base de la mécanique et en particulier le Théorème Fondamental de la Statique et de la Dynamique (TFS et TFD) que l'on appelle fréquemment équation d'équilibre. Il permet également de fixer les notations utilisées. Enfin s'il ne fallait retenir qu'une seule idée de ce "cours", ce serait le principe des puissances virtuelles abordé dans ce chapitre.

1. – Principes fondamentaux

Quelle est l'articulation du "cours"? Nous allons présenter succinctement dans ce paragraphe les propriétés de base de la mécanique qui sont plus approfondies dans un cours de Mécanique des Milieux Continus (MMC) [1]. Bien qu'elles soient difficilement abordables par un profane de la mécanique, les dispenser en début de "cours" permet d'en démontrer leur "puissance" et leur caractère "générateur". En effet, même si nous ne le ferons pas en détail, il est possible de montrer que toute la suite du "cours" découle naturellement et parfaitement de ces notions de base comme de simples cas particuliers.

1. 1. – Hypothèses et notations

Comme nous l'avons déjà précisé le rôle essentiel de l'ingénieur devrait être de créer un lien entre expérience et théorie. Cette dernière est construite sur la base des mathématiques. Etant donné que nous resterons toujours dans le cadre de la mécanique newtonienne (non relativiste), nous représenterons notre espace physique par un espace affine euclidien \dot{E} d'espace vectoriel associé E de dimension 3. Signalons que la "nature mathématique" de la grandeur théorique est autant fondamentale que son unité physique (S.I.). De ce fait, nous soulignerons de n traits tout opérateur linéaire "d'ordre" n (scalaire,

contravecteur, matrice, endomorphisme, application linéaire, tenseur d'ordre n , ..) ainsi que ses "objets" associés. Par exemple un scalaire ("d'ordre" 0) sera noté x , un vecteur ("d'ordre" 1) \underline{x} , une matrice carré ("d'ordre" 2) $\underline{\underline{x}}$ et un opérateur linéaire "d'ordre" 4 $\underline{\underline{\underline{x}}}$. Ces définitions peuvent paraître manquer de justesse. L'annexe 1 en constitue un éclairage particulier. Précisons que la dérivée par rapport au temps de l'objet \mathbf{O} sera noté $\dot{\mathbf{O}}$ pour alléger les écritures, sauf pour la désignation de l'espace affine $\dot{\mathbf{E}}$. Enfin une variable sera surmontée d'un \wedge pour préciser son caractère de fonction, les éléments dans la parenthèse accolée à droite en constituant ses arguments de manière non exhaustive.

On notera \mathbf{m} un élément de $\dot{\mathbf{E}}$. On voit dès à présent apparaître un problème de modélisation. En effet qu'elle est la taille physique de \mathbf{m} ? Par exemple pour une pièce métallique est-ce un atome, un grain (voir cours de Matériaux), un ensemble de grains, la pièce entière? Nous sommes donc confrontés à un problème d'échelle. Il faut alors se fixer la taille physique de \mathbf{m} classiquement appelée Volume Élémentaire Représentatif (VER). Cela permet de modéliser le comportement mécanique de \mathbf{m} et le type d'interaction avec ses voisins. En ce qui concerne la RdM, le VER est par exemple d'environ $1 \mu\text{m}^3$ pour un métal et d'environ 125 cm^3 pour un béton (formé de gravier, sable et ciment). Nous préciserons ultérieurement ce que l'on entend par comportement mécanique de \mathbf{m} .

1. 1. 1. – Puissance, vitesse et effort

Les trois terminologies principales de la mécanique sont la puissance, la vitesse et l'effort. Nous allons les préciser volontairement dans cet ordre qui nous semble le plus fondamental. En effet, dans la plupart des cours de physique où l'on parle de mécanique (du point matériel en général), la notion de force est donnée comme une réalité physique que tous les étudiants semblent bien "ressentir". Néanmoins cette sensation est souvent erronée. Tout d'abord signalons qu'il existe une notion interdisciplinaire en physique (électricité, thermique, mécanique, etc.), c'est la puissance \mathcal{P} ou l'énergie \mathcal{E} après intégration de \mathcal{P} par rapport au temps. Puis chaque domaine physique se distingue par une grandeur caractéristique $\dot{\mathbf{X}}$ ou \mathbf{X} simple à quantifier (intensité ou charge électrique en électricité, température ou intégrale de température, vitesse ou déplacement en mécanique, etc.). Ce n'est que muni de ces deux grandeurs ($\mathcal{P}, \dot{\mathbf{X}}$) que l'on accède à la nouvelle grandeur \mathbf{Y} , dite conjuguée ou duale de \mathbf{X} , que l'on appellera force en mécanique (potentiel en électricité, dissipation en thermique). Elle est définie par :

$$\mathcal{P} = \mathbf{Y} \cdot \dot{\mathbf{X}} \quad (1)$$

De façon générale, le \cdot entre deux objets de même nature mathématique représentera le produit scalaire canonique. Aucun signe distinctif ne précisera une composition entre opérateurs. Il faudra respecter la règle "usuelle" d'un ordre de composition de droite à gauche, les parenthèses étant prioritaires. Par exemple, pour deux matrices carrées $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ et $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ de mêmes dimensions, on a :

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \text{trace}(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^T \underline{\underline{\mathbf{B}}}) = \text{tr}(\underline{\underline{\mathbf{B}}}^T \underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \text{tr}(\underline{\underline{\mathbf{A}}} \underline{\underline{\mathbf{B}}}^T) = \sum_i A_j^i B_j^i \quad (2)$$

Remarques

- On utilisera la convention d'Einstein suivant laquelle deux indices répétés se somment.

► En général et pour simplifier, on confondra l’objet mathématique et sa représentation. Par exemple un vecteur de E est une colonne formée de trois scalaires. Dans ce cas il est primordial de garder en mémoire le repère (base) de E correspondant. Notons qu’il est en fait possible de garder une écriture totalement intrinsèque. Pour cela, on pourra consulter par exemple [2], l’annexe 1 et [3].

Prenons dès lors un exemple simple de mécanique afin d’illustrer ce propos. Il s’agit de l’appareil, quelque peu “magique” nommé dynamomètre, permettant de mesurer des forces (environ cours de physique de seconde). Il est constitué d’un ressort dont l’une des extrémités sert de curseur vis à vis d’une graduation fixe (Fig. I.2).

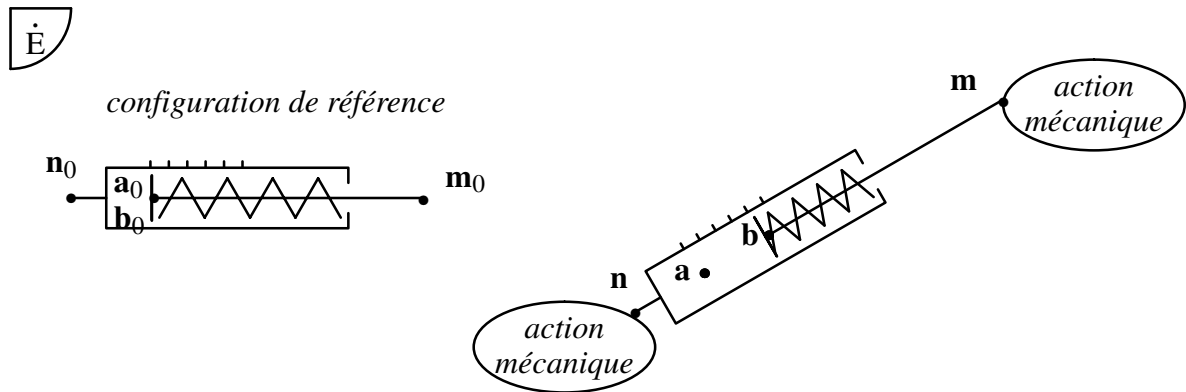


Figure I.2 : Dynamomètre.

En réalité, si l’on néglige l’énergie cinétique du dynamomètre devant son énergie de déformation, on mesure avec cet appareil directement l’énergie de déformation élastique du ressort et non un effort. Cette énergie est donnée par :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} k (\underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{a}})^2 \tag{3}$$

k étant la constante de raideur élastique du ressort. On en déduit la puissance dans un déplacement de \mathbf{a} et de \mathbf{b} :

$$\mathcal{P} = \dot{\mathcal{E}} = k (\underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{a}}) \cdot (\dot{\underline{\mathbf{b}}} - \dot{\underline{\mathbf{a}}}) \tag{4}$$

Notons $\underline{\mathbf{m}} - \underline{\mathbf{b}} = L \underline{\mathbf{u}}$ et $\underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{a}} = x \underline{\mathbf{u}}$ avec $\| \underline{\mathbf{u}} \| = 1$, il vient alors :

$$\mathcal{P} = k x \underline{\mathbf{u}} \cdot (\dot{\underline{\mathbf{b}}} - \dot{\underline{\mathbf{a}}}) \tag{5}$$

Sachant que $(\underline{\mathbf{m}} - \underline{\mathbf{b}})^2 = L^2$ est constant dans le temps, il vient après dérivation :

$$(\underline{\mathbf{m}} - \underline{\mathbf{b}}) \cdot (\dot{\underline{\mathbf{m}}} - \dot{\underline{\mathbf{b}}}) = 0 \tag{6}$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbf{u}} \cdot (\dot{\underline{\mathbf{m}}} - \dot{\underline{\mathbf{b}}}) = 0 \tag{7}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\dot{\mathbf{m}}} = \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\dot{\mathbf{b}}} \quad (8)$$

Cette dernière relation associée aux solides indéformables est celle de l'équiprojectivité des vitesses (cours de Mécanique Générale). Ainsi la même démonstration est possible avec le couple de points \mathbf{n} et \mathbf{a} , de sorte que :

$$\Rightarrow \quad \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\dot{\mathbf{n}}} = \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\dot{\mathbf{a}}} \quad (9)$$

En combinant les équations (5), (8) et (9), et en notant $\underline{\mathbf{v}}_m = \underline{\dot{\mathbf{m}}}$ et $\underline{\mathbf{v}}_n = \underline{\dot{\mathbf{n}}}$ les vitesses respectivement du point \mathbf{m} et du point \mathbf{n} , on obtient :

$$\mathcal{P} = k \times \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_m - k \times \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{v}}_n \quad (10)$$

D'après la définition de la force (notée $\underline{\mathbf{F}}$ en général) à partir de la puissance (1), nous déduisons de (10) celles associées aux actions mécaniques en \mathbf{n} et \mathbf{m} , soit :

$$\begin{cases} \underline{\mathbf{F}}_m = \underline{\mathbf{Y}}_m = k \times \underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\mathbf{F}}_n = \underline{\mathbf{Y}}_n = -k \times \underline{\mathbf{u}} \end{cases} \quad (11)$$

Cet exemple simple a permis de définir concrètement une notion de force et au passage montre que les forces aux deux extrémités d'un ressort sont opposées, d'intensités proportionnelles à son allongement et de directions parallèles à son axe. Enfin la dimension physique des forces est le Newton (N), correspondant à 1 Watt multiplié par 1 seconde divisé par 1 mètre (W s m^{-1}) ou encore à 1 Joule divisé par 1 mètre (J m^{-1}).

Remarque

► Pour toute la suite du cours nous adopterons l'Hypothèse des Petites Perturbations (HPP). En effet, la conception d'une grande majorité des systèmes mécaniques ne nécessite pas l'utilisation des grandes perturbations plus fréquemment appelées grandes transformations, maintenant relativement bien maîtrisées mais où certaines questions relèvent toujours du domaine de la recherche. Pour en revenir à l'HPP, elle consiste à supposer que les déplacements des points matériels constituant le corps mécanique considéré sont très petits devant les dimensions de ce dit corps. Ce qui revient en particulier à dire que tous les calculs de géométrie différentielle se feront sur la configuration de référence du corps considéré (variables indicées par 0).

1. 1. 2. – Puissance, taux de déformation et contrainte

Dans l'exemple précédent, nous sommes partis de l'énergie de déformation du ressort fonction de la raideur k . Essayons de préciser l'expression de k . Tout d'abord on peut se poser la question légitime suivante. La valeur de k est-elle fonction de la longueur de référence du ressort? La réponse est oui! Pour s'en convaincre il suffit d'imaginer le travail à fournir pour allonger de 10 cm un élastique de 5 cm et de le comparer au travail à fournir pour allonger de la même quantité (10 cm) un élastique de même type mais de longueur initiale 1 m. Afin de quantifier cette influence il est nécessaire de réaliser des expériences.

1. 1. 2. 1. – Chargement uniaxial de traction

L'essai de traction uniaxiale est l'essai de base afin d'identifier l'énergie de déformation d'un matériau. Il s'agit d'étirer suivant son axe une éprouvette cylindrique de section généralement circulaire ou rectangulaire (Fig. I.3).

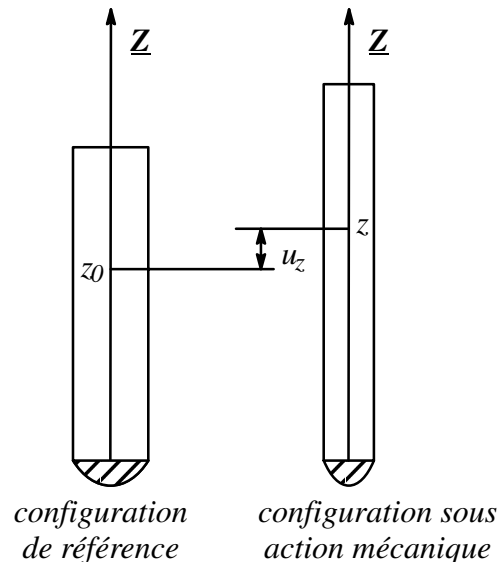
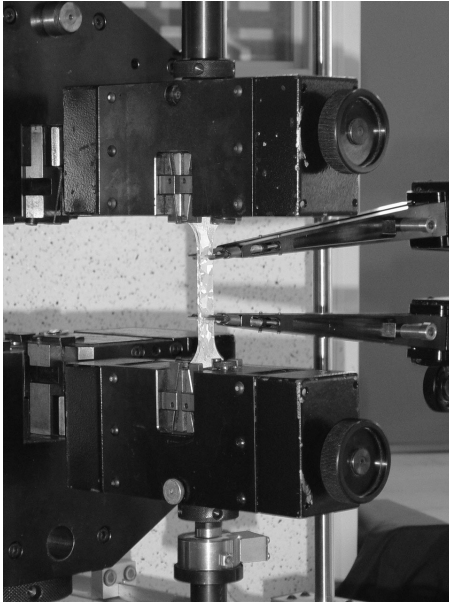


Figure I.3 : Essai de traction uniaxiale sur machine électromécanique de l'ENSTA Bretagne.

Après une analyse simplifiée de ce type d'essai, les résultats sont les suivants.

Une section droite (perpendiculaire à l'axe \underline{Z}) de l'éprouvette reste une section droite au cours de la traction.

Le déplacement (suivant l'axe) des sections est proportionnel à la distance initiale de ces dernières vis à vis du point d'ancrage de l'éprouvette.

A ε (rapport entre l'allongement de l'échantillon et sa longueur initiale) fixé, l'énergie fournie par la machine de traction \mathcal{E} (en négligeant les effets cinétiques et thermiques) est proportionnelle au volume initial de l'éprouvette.

On peut tirer de ces constatations expérimentales que si l'on appelle u_z le déplacement d'une section droite de cote z_0 (initialement), alors :

$$u_z = \varepsilon z_0 \quad (12)$$

Il apparaît naturellement de (12) une grandeur caractéristique de cet essai que l'on nommera déformation suivant \underline{Z} et qui sera définie par :

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z_0} = \varepsilon \quad (13)$$

Dans cet essai la déformation suivant \underline{Z} est donc constante quel que soit le point matériel considéré à l'intérieur de l'éprouvette. Il s'agit d'un essai homogène. Supposons dès lors qu'il existe une énergie de déformation volumique (en toute rigueur il faut considérer une énergie par unité de masse [3]) \mathcal{E}_v dans l'éprouvette telle que :

$$\mathfrak{E} = \int_{\Omega_0} \mathfrak{E}_v \, d\Omega_0 \quad (14)$$

où Ω_0 représente le domaine géométrique de l'éprouvette dans sa configuration de référence. Afin de vérifier la troisième constatation expérimentale, il est raisonnable de considérer que \mathfrak{E}_v ne soit fonction que de ε_z , soit :

$$\mathfrak{E}_v = \hat{\mathfrak{E}}_v(\varepsilon_z) \quad (15)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{E} = \hat{\mathfrak{E}}_v(\varepsilon) \int_{\Omega_0} d\Omega_0 \quad (16)$$

Contrairement à l'exemple précédent du dynamomètre, la variable représentative n'est plus le déplacement x mais la déformation ε . On a donc enrichi la représentation du corps mécanique en considérant son volume et chaque point matériel se trouvant à l'intérieur. Pour chacun de ces derniers, on peut construire l'équivalent de la force du dynamomètre. Il suffit de calculer la puissance de déformation qui est égale à la dérivée par rapport au temps de \mathfrak{E} . Il vient donc :

$$\mathcal{P} = \int_{\Omega_0} \hat{\mathfrak{E}}_v'(\varepsilon) \dot{\varepsilon} \, d\Omega_0 \quad (17)$$

De cette équation, il apparaît clairement que la grandeur conjuguée à ε , que l'on appellera σ , est définie par :

$$\sigma = \hat{\mathfrak{E}}_v'(\varepsilon) \quad (18)$$

Un calcul aux unités à partir de (18) montre que, ε étant sans dimension, σ s'exprime en J m^{-3} équivalent à des N m^{-2} . Cette unité est une unité de pression, soit le Pascal que l'on note Pa. Ainsi, l'enrichissement de la description du corps mécanique nous indique qu'à l'intérieur de ce dernier la notion de force est remplacée par celle de pression, plus couramment désignée par contrainte.

On peut dès lors préciser ce que recouvre la notion de comportement. Il s'agit dans le cadre de la traction uniaxiale de l'équation (18) qui relie la contrainte σ à la déformation ε . En Fig. I.4 est présenté un résultat typique pour les matériaux métalliques.

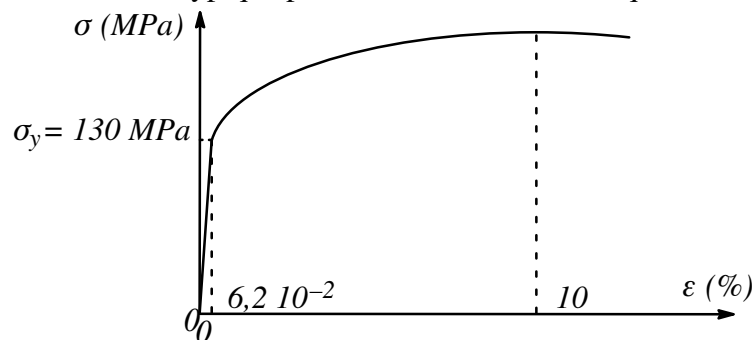


Figure I.4 : Comportement en traction uniaxiale de l'XC18.

Les comportements des matériaux sont analysés plus en détail dans les cours de Matériaux. Pour ce qui nous concerne, les résultats essentiels à retenir sont les suivants.

Il existe un domaine dit d'élasticité (car réversible) linéaire où :

$$\sigma = E \varepsilon \quad (19)$$

La constante E est appelée module d'Young. C'est une caractéristique mécanique du matériau qui s'exprime en Pascal (Pa). Cependant le domaine d'élasticité linéaire est borné. En traction uniaxiale cette borne est donnée par une contrainte σ_y nommée limite d'élasticité ou seuil de plasticité (l'indice y n'est pas associé à la direction \underline{Y} , mais à la notion d'écoulement [plastique] soit "yield" en anglais). Pour des valeurs de contrainte supérieures à σ_y , le matériau entre dans un domaine "plastique" irréversible. Cela signifie que si l'on décharge l'éprouvette ($\sigma = 0$) après avoir préalablement atteint le domaine "plastique", cette dernière ne retrouvera pas ses dimensions de référence. Elle restera allongée de manière irréversible.

On notera également que le domaine d'élasticité est souvent très petit, au sens des déformations, par rapport au domaine "plastique".

Enfin le domaine d'élasticité est compatible avec l'HPP car les déplacements de l'éprouvette sont environ 1000 fois plus petits que sa plus grande dimension.

Un essai de compression ($\varepsilon < 0$) donnerait la même courbe que celle de la Fig. I.4 par symétrie centrale par rapport au point (0,0).

Dans ce "cours", nous considérerons que les matériaux restent dans leur domaine d'élasticité que ce soit en compression ou en traction. Au passage, grâce à (18) et (19), il est possible de donner l'expression de l'énergie volumique de traction ou compression uniaxiale en élasticité linéaire :

$$\mathcal{E}_v = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \quad (20)$$

A la lumière de cet exemple simple, nous allons étendre les notions de contrainte et déformation au cadre tridimensionnel.

1. 1. 2. 2. – Chargement quelconque

Avant d'aborder le point fondamental de ce "cours" représenté par le Principe des Puissances Virtuelles (PPV), il est préférable de donner quelques définitions et notations. Le corps mécanique étudié est un milieu solide dont la représentation théorique est un ouvert de \dot{E} de configuration de référence Ω_0 (Fig. I.5). Ce corps est soumis à des actions mécaniques extérieures. Le recensement de toutes ces actions est un passage obligé. Dans le jargon des mécaniciens on dit que l'on isole le corps mécanique considéré. Il semble que ce travail soit souvent source de difficultés pour les élèves ou étudiants, pourtant il ne s'agit que d'un inventaire minutieux et exhaustif qui, si l'on y passe le temps et la rigueur nécessaires, ne peut être erroné. Nous allons présenter dans ce qui suit les principales formes de ces actions extérieures que l'on utilisera dans ce "cours". Il s'agit d'actions idéalisées (Fig. I.5) et une part importante du travail d'ingénieur consistera à modéliser les actions réelles sur un corps réel.

On distingue deux grands types d'action que sont les actions de contact qui s'exercent sur la frontière de Ω_0 soit $\partial\Omega_0$, et les actions à distances s'appliquant en tout point \mathbf{m}_0 de Ω_0 . En ce

qui concerne le premier type nous considérerons :

- des efforts ponctuels $\underline{\mathbf{P}}$ qui sont des vecteurs de E dont l'intensité s'exprime en Newton (N),
- des efforts par unité de longueur $\underline{\mathbf{Q}}$ qui sont des vecteurs de E dont l'intensité s'exprime en Newton par mètre (N m^{-1}) et qui s'appliquent sur un contour C_0 appartenant à $\partial\Omega_0$,
- des vecteurs contraintes $\underline{\mathbf{T}}$ qui sont également des vecteurs de E mais dont l'intensité s'exprime cette fois-ci en Pascal (Pa) et qui s'appliquent sur une partie de $\partial\Omega_0$ que l'on notera $\partial\Omega_0^T$.
- des vecteurs vitesses $\underline{\mathbf{v}}$ qui sont des vecteurs de E et qui imposent la vitesse matérielle des points constituant le sous-ensemble $\partial\Omega_0^v$ de $\partial\Omega_0$ auxquels ils sont appliqués.

Le second type est constitué des efforts à distance $\underline{\mathbf{f}}$ (ex. pesanteur) qui sont des vecteurs de E dont l'intensité s'exprime en Newton par mètre cube (N m^{-3}).

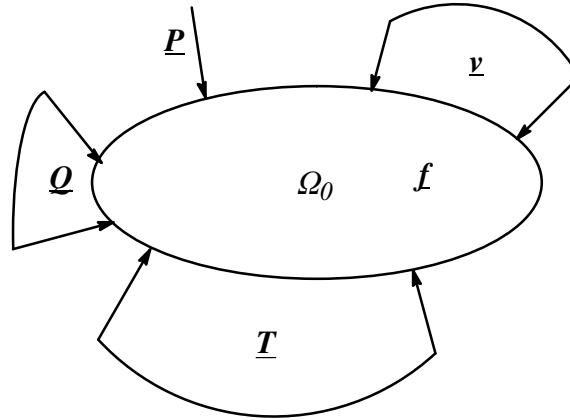


Figure I.5 : Description du problème mécanique.

On appellera champ de déplacement l'ensemble des éléments de E constituant les vecteurs déplacements de chaque point \mathbf{m}_0 de Ω_0 , soit :

$$\{\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{m}} - \mathbf{m}_0 = \hat{\underline{\mathbf{u}}}(\mathbf{m}_0) / \mathbf{m}_0 \in \Omega_0\} \quad (21)$$

De manière analogue on définit le champ des vitesses par :

$$\{\underline{\mathbf{v}} = \underline{\dot{\mathbf{u}}} = \underline{\dot{\mathbf{m}}} = \hat{\underline{\mathbf{v}}}(\mathbf{m}_0) / \mathbf{m}_0 \in \Omega_0\} \quad (22)$$

Enfin un champ de vitesse sera qualifié de Cinématiquement Admissible avec 0 (CA0) si et seulement si la vitesse de tous les points de $\partial\Omega_0^v$ est nulle dans la direction où est imposée la vitesse.

Remarque

► La description assez générale du chargement extérieur n'est pas "licite" dans la formulation faible de l'équilibre (PPV que nous présentons par la suite au paragraphe 2. 1.) pour toutes les dimensions de schématisation du domaine matériel Ω_0 considéré. Si ce dernier est "1D" (poutre, chapitre III) $\underline{\mathbf{T}}$ et $\underline{\mathbf{f}}$ n'ont plus de sens, si Ω_0 est "2D" (plaque, chapitre IV) $\underline{\mathbf{f}}$ n'a plus de sens et $\underline{\mathbf{P}}$ n'est acceptable qu'au sens des distributions ($\underline{\mathbf{v}}^*$ appartenant à l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans Ω_0) et enfin si Ω_0 est "3D" (solide déformable) $\underline{\mathbf{P}}$ et $\underline{\mathbf{Q}}$ ne sont acceptables qu'au sens des distributions ($\underline{\mathbf{v}}^*$ appartenant à l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans Ω_0).