Chapitre 1

Second degré

D'un point de vue géométrique, les équations algébriques du premier degré correspondent à des problèmes d'intersection de droites ou de plans tandis que le second degré intervient naturellement dans le calcul d'aires.
D'un point de vue physique, les forces gravitationnelles étant inversement proportionnelles au carré de la distance, les trajectoires des planètes décrivent des courbes algébriques du deuxième degré, des ellipses.

Un mathématicien

Héron d'Alexandrie vécut au premier siècle de notre ère. Inventeur talentueux, il construisit de nombreuses machines mues par des mouvements de fluides. On lui doit aussi des découvertes en géométrie, en particulier sur des calculs d'aires et de volumes. Il a fourni en particulier la première méthode de calcul d'une racine carrée par la limite d'une suite et on lui doit la première formule de calcul des racines de certaines équations de second degré.

LE SAVIEZ-VOUS ?

On a retrouvé des tablettes d'argile babylonienne datant d'environ 2 000 ans avant Jésus-Christ sur lesquelles étaient résolues des équations du second degré. Plus près de nous, **Euclide** (300 av. J.-C.) a donné des résolutions géométriques de telles équations. Cependant, c'est un mathématicien arabe, **Al-Khwarizmi** qui fit le premier, au début du IXe siècle, une étude exhaustive de la résolution des équations du second degré dans un ouvrage *Kitab al-jabr*. Ce fut la naissance de l'algèbre !

COMPÉTENCES

les incontournables

- Transformer un trinôme du second degré
  - pour obtenir sa forme canonique
  - pour le factoriser
- Résoudre des équations et des inéquations du second degré
  - en utilisant le discriminant
  - en établissant le signe d'un trinôme

et plus si affinités

- Étudier la position relative
  - d'une courbe par rapport à l'axe des abscisses
  - de deux courbes

Résumé de cours

Polynômes du second degré

Généralités

Définition : *On appelle* ***fonction polynôme du second degré*** *ou trinôme du second degré, toute fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *qui peut s'écrire sous la forme* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *où* a, b, c *sont trois réels avec* a *non nul. .*

Théorème 1.1.— Tout trinôme du second degré de forme développée $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$ s'écrit de façon unique sous la forme :

$$\boxed{P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \text{ avec } \alpha = \frac{-b}{2a} \text{ et } \beta = P(\alpha)}$$

Vocabulaire : *Cette écriture est appelée* ***forme canonique du trinôme****.*

Sens de variation

Proposition 1.2.— Soit P une fonction trinôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois réels avec a non nul.

- Si $a < 0$ alors P est strictement croissante sur $\left]-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right[$. P présente donc un maximum sur $\mathbb{R}$ en $x = -\frac{b}{2a}$ qui vaut $P\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2}{4a} + c$.
- Si $a > 0$ alors P est strictement décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$ et strictement croissante sur $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right[$. P présente donc un minimum sur $\mathbb{R}$ en $x = -\frac{b}{2a}$ qui vaut $P\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2}{4a} + c$.

Cas $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$P(x)$	$\nearrow$	$-\frac{b^2}{4a} + c$	$\searrow$

Cas $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$P(x)$	$\searrow$	$-\frac{b^2}{4a} + c$	$\nearrow$

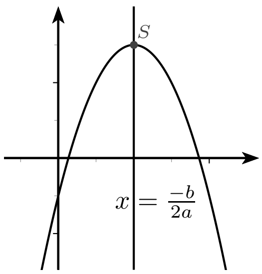
Représentation graphique

Proposition 1.3.— Soit P une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois réels avec a non nul.

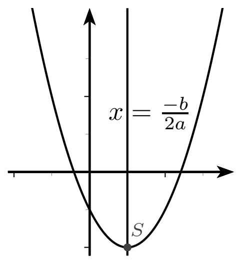
- La courbe représentative de P dans un repère orthonormal est une parabole.
- Cette parabole possède une axe de symétrie qui est la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.
- Le point S de coordonnées $\left(-\frac{b}{2a}; P\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ est le sommet de la parabole.

Remarque : Si $a < 0$, on dit que la parabole est « tournée vers le bas », si $a > 0$, on dit que la parabole est « tournée vers le haut ».

Cas $a < 0$



Cas $a > 0$



■ Équations du second degré et factorisation

Généralités

Définition : *On appelle **équation du second degré** à une inconnue toute équation pouvant s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont trois réels avec a non nul.*

Vocabulaire : *En appelant P le polynôme du second degré défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$, résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ revient à résoudre $P(x) = 0$. Les solutions de cette équation sont appelées les **racines** du polynôme P.*

Résolution

Théorème 1.4.— Soit P une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois réels avec a non nul.
On appelle **discriminant** du polynôme P le réel $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$.

- Si $\Delta > 0$ le polynôme P possède deux racines distinctes $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$ le polynôme P possède une seule racine $x = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$ le polynôme P ne possède pas de racines réelles.

Remarque : Lorsque le polynôme P possède deux racines x_1 et x_2 alors $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Factorisation

Proposition 1.5.— Soit P une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois réels avec a non nul.

- Si le polynôme P possède deux racines distinctes x_1 et x_2 alors P est factorisable et peut s'écrire $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si le polynôme P possède une seule racine x_0 alors P est factorisable et peut s'écrire $P(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si le polynôme P ne possède pas de racines réelles alors il n'est pas factorisable dans $\mathbb{R}$.

Vocabulaire : *Cette forme est la **forme factorisée** du polynôme P.*

■ Signe d'un trinôme

Théorème 1.6.— Soit P une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois réels avec a non nul.

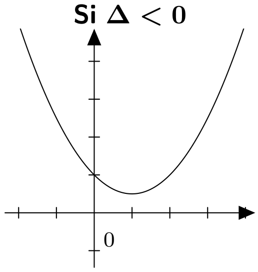
- Si le polynôme P possède deux racines distinctes, notées x_1 et x_2 avec $x_1 < x_2$ alors P est du signe de a à l'extérieur de l'intervalle $]x_1; x_2[$, du signe de $-a$ à l'intérieur.
- Si le polynôme P possède une seule racine x_0 alors P est toujours du signe de a (et s'annule en x_0).
- Si le polynôme P ne possède pas de racines réelles alors P est toujours du signe de a.

Remarque : On peut retenir ce théorème sous la forme : P est du signe de a à l'extérieur de l'intervalle des racines si l'en a et toujours du signe de a s'il n'en a pas.

Résumé

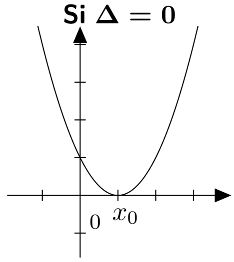
Cas $a > 0$

Si $\Delta < 0$



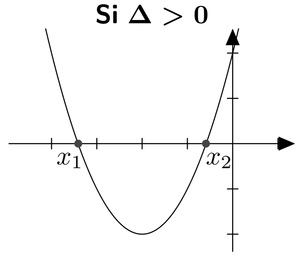
x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	$+$	

Si $\Delta = 0$



x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$P(x)$	$+$	0	$+$

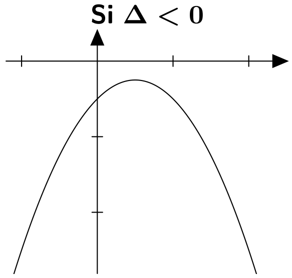
Si $\Delta > 0$



x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

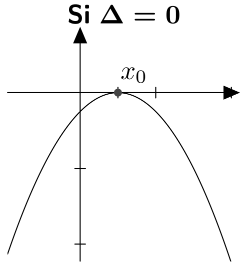
Cas $a < 0$

Si $\Delta < 0$



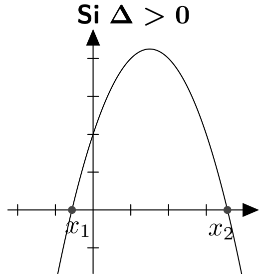
x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	$-$	

Si $\Delta = 0$



x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$P(x)$	$-$	0	$-$

Si $\Delta > 0$



x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Méthodes

Déterminer et utiliser la forme canonique

Méthode 1.1.— Comment obtenir la forme canonique d'un trinôme

$\boxed{1}$ On met le polynôme sous la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$ et on identifie les coefficients a, b et c.

$\boxed{2}$ On calcule les coefficients $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$, $\beta = P(\alpha)$ pour donner la forme canonique.

$\boxed{3}$ D'après le **théorème 1.1**, la forme canonique est : $P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

Exemple : Donner la forme canonique du polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = -2x^2 + 3x - 5$.

$\boxed{1}$ Ici $a = -2$, $b = 3$ et $c = -5$.

$\boxed{2}$ D'où $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2\times(-2)} = \frac{3}{4}$ et $\beta = P(\alpha) = P\left(\frac{3}{4}\right) = -2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3\times\left(\frac{3}{4}\right) - 5 = -\frac{9}{8} + \frac{9}{4} - 5 = -\frac{31}{8}$.

$\boxed{3}$ La forme canonique est $P(x) = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{31}{8}$.

Mise en œuvre : exercice 1.1

Méthode 1.2.— Comment obtenir la forme canonique sans la formule du cours

$\boxed{1}$ On factorise par a les termes $ax^2 + bx$.

$\boxed{2}$ On considère $x^2 + \dfrac{b}{a}x$ comme le début du développement d'une identité remarquable.

Exemple : Donner la forme canonique du polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 2x^2 - 4x - 7$.

$\boxed{1}$ $P(x) = 2x^2 - 4x - 7 = 2(x^2 - 2x) - 7$.

$\boxed{2}$ On considère que $x^2 - 2x$ est le début du développement de $(x-1)^2$, ce qui permet d'écrire $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$. On a alors $P(x) = 2(x^2 - 2x) - 7 = 2((x-1)^2 - 1) - 7 = 2(x-1)^2 - 2 - 7$. La forme canonique est $P(x) = 2(x-1)^2 - 9$.

Mise en œuvre : exercice 1.1, exercice 1.2

La courbe représentative d'un trinôme défini par $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec a, b, c des réels tels que a est non nul est une parabole $\mathscr{P}$. On peut déterminer l'expression de $P(x)$ à partir de la parabole.

Méthode 1.3.— Comment déterminer un trinôme à l'aide de sa courbe

- Si on connaît le sommet, on utilise la forme canonique et la **proposition 1.3**.
- Si on connaît les points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses, on utilise la **proposition 1.5**

Exemple : Déterminer l'expression du trinôme P représenté par la parabole $\mathscr{P}$ qui a pour sommet le point $S(-1;2)$ et passe par le point $A(2;20)$.

D'après la **proposition 1.3** et le **théorème 1.1**, le polynôme P s'écrit $P(x) = a(x - (-1))^2 + 2 = a(x+1)^2 + 2$ puisque l'abscisse du sommet correspond au coeffcient α de la forme canonique et l'ordonnée au coefficient β.
La parabole $\mathscr{P}$ passant par A, on sait que $P(2) = 20$ soit $a(2+1)^2 + 2 = 20$ donc $a = \frac{18}{9} = 2$.
L'expression de P est donc $P(x) = 2(x+1)^2 + 2$ ou $P(x) = 2x^2 + 4x + 4$.

Exemple : Déterminer l'expression du trinôme P représenté par la parabole $\mathscr{P}$ qui coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses -1 et 5 et passe par le point $B(2; -18)$.
Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{P}$ avec l'axe des abscisses nous donne les racines du polynôme P.
On peut alors utiliser la **proposition 1.5**, ce qui permet d'écrire $P(x) = a(x - (-1))(x - 5) = a(x+1)(x-5)$.
La parabole $\mathscr{P}$ passant par B, on sait que $P(2) = -18$ soit $a(2+1)(2-5) = -18$ donc $a = \frac{-18}{-9} = 2$.
L'expression de P est donc $P(x) = 2(x+1)(x-5)$ ou $P(x) = 2x^2 - 8x - 10$.

Mise en œuvre : exercice 1.3 ; exercice 1.4

■ Déterminer et utiliser les racines

> ❑ **Méthode 1.4.— Comment résoudre une équation du second degré**
>
> $\boxed{1}$ On transforme l'équation afin de se ramener à la recherche des racines d'un trinôme.
>
> $\boxed{2}$ On identifie les coefficients a, b et c et on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
>
> $\boxed{3}$ On utilise le **théorème 1.4** pour trouver les éventuelles racines du polynôme.

Exemple : Résoudre l'équation $4x^2 + 3x - 2 = 0$.
Ici la première étape est inutile puisque l'on a déjà à résoudre $P(x) = 0$ avec $P(x) = 4x^2 + 3x - 2$.
On peut immédiatement calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = 4$, $b = 3$ et $c = -2$ d'où $\Delta = 3^2 - 4 \times 4 \times (-2) = 41$.
$\Delta > 0$ donc 'après le **théorème 1.4**, P possède deux racines $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{41}}{2 \times 4}$ et $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{41}}{2 \times 4}$.
Les solutions de l'équation $4x^2 + 3x - 2 = 0$ sont donc $x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{41}}{8}$ et $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{41}}{8}$.

Exemple : Résoudre l'équation $x^2 - 10x = -36$.
$\boxed{1}$ Cette équation est équivalente à $x^2 - 10x + 36 = 0$.
$\boxed{2}$ On a $a = 1$, $b = -10$ et $c = 36$ et donc le discriminant vaut $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 36 = -44$.
$\boxed{3}$ Le discriminant est strictement négatif donc le trinôme $x^2 - 10x + 36$ n'a pas de racines. L'équation $x^2 - 10x = -36$ n'a pas de solutions.

Exemple : Résoudre l'équation $-2x^2 = -2x + \frac{1}{2}$.
$\boxed{1}$ Cette équation est équivalente à $-2x^2 + 2x - \dfrac{1}{2} = 0$.
$\boxed{2}$ On a $a = -2$, $b = 2$ et $c = -\frac{1}{2}$ et donc le discriminant vaut $\Delta = (2)^2 - 4 \times (-2) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.
$\boxed{3}$ Le discriminant est nul donc le polynôme $-2x^2 + 2x - \frac{1}{2}$ possède une seule racine $x_0 = -\frac{2}{2 \times (-2)} = \frac{1}{2}$. L'unique solution de l'équation $-2x^2 = -2x + \frac{1}{2}$ est donc $x_0 = \frac{1}{2}$.

Mise en œuvre : exercice 1.4 ; exercice 1.5

> ❑ **Méthode 1.5.— Comment obtenir la forme factorisée d'un polynôme du second degré**
> $\boxed{1}$ On commence par déterminer si le polynôme possède des racines réelles en calculant son discriminant.
> $\boxed{2}$ On utilise alors la **proposition 1.5** pour savoir si le polynôme est factorisable puis réaliser la factorisation.

Exemple : Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 3x^2 + 11x - 4$. Factoriser P si possible.
$\boxed{1}$ On calcule le discriminant de P qui vaut $\Delta = 11^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 169$. Le discriminant de P étant strictement positif, P possède deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-11 + \sqrt{169}}{2 \times 3} = \frac{1}{3} \text{ et } x_2 = \frac{-11 - \sqrt{169}}{2 \times 3} = -4.$$

$\boxed{2}$ D'après la **proposition 1.5**, le polynôme P est factorisable et on a

$$P(x) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - (-4)) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 4).$$

Exemple : Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 8x^2 - \dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{18}$. Factoriser P si possible.
$\boxed{1}$ On calcule le discriminant de P qui vaut $\Delta = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 4 \times 8 \times \frac{1}{18} = 0$. Le discriminant de P étant nul, P possède une seule racine $x_0 = \frac{-\left(-\frac{4}{3}\right)}{2\times 8} = \frac{1}{12}$.
$\boxed{2}$ D'après la **proposition 1.5**, le polynôme P est factorisable et on a $P(x) = 8\left(x - \frac{1}{12}\right)^2$.

Exemple : Soit P le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 7x^2 - 9x + 5$. Factoriser P si possible.
$\boxed{1}$ On calcule le discriminant de P qui vaut $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 7 \times 5 = -59$. Le discriminant de P étant strictement négatif, P ne possède pas de racine.
$\boxed{2}$ D'après la **proposition 1.5**, le polynôme P n'est pas factorisable.

Mise en œuvre : exercice 1.6

■ Déterminer et utiliser le signe

> ❑ **Méthode 1.6.— Comment déterminer le signe d'un trinôme**
> $\boxed{1}$ On calcule le discriminant du polynôme pour déterminer ses racines éventuelles.
> $\boxed{2}$ On utilise le **théorème 1.6** pour établir le signe du polynôme.

Exemple : Déterminer le signe du polynôme P défini sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 - 7x + 10$.
$\boxed{1}$ Les coefficients de P sont $a = 1$, $b = -7$, $c = 10$ et son discriminant est $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 9$. $\Delta > 0$ donc P possède deux racines distinctes $x_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{9}}{2\times 1} = 2$ et $x_2 = \frac{-(-7) + \sqrt{9}}{2\times 1} = 5$.