

Table des matières

1	Notions de base	1
1	Notions sur les ensembles	2
1.1	Appartenance	2
1.2	Inclusion, égalité	2
1.3	Opérations élémentaires dans $\mathcal{P}(E)$	3
1.4	Propriétés des opérations élémentaires	3
1.5	Produit d'ensembles	6
2	Applications	7
2.1	Définition et exemples d'applications	7
2.2	Injectivité, surjectivité, bijectivité	9
2.3	Image directe, image réciproque d'une partie	14
2.4	Restriction, prolongement, application induite	15
2.5	Fonction indicatrice d'une partie	16
3	Éléments de logique	18
3.1	Généralités	18
3.2	Propriétés des éléments d'un ensemble E	19
3.3	Opérations élémentaires sur les assertions	19
3.4	Comparaison des propriétés des éléments de E	20
3.5	Propriétés de l'ensemble E	22
4	Stratégies de démonstration	23
4.1	Quelques cas particuliers rencontrés	23
4.2	Stratégies pour démontrer une propriété universelle	24
4.3	Stratégies pour démontrer une propriété existentielle	24
4.4	Stratégies pour démontrer une implication	25
5	How To	29
2	Entiers naturels et Dénombrements	31
1	Entiers naturels	32
1.1	Principe de récurrence	32
1.2	Opérations dans \mathbb{N}	36
2	Ensembles finis, ensembles dénombrables	38
2.1	Notion de cardinal des ensembles finis	38
2.2	Ensembles dénombrables	43
3	Dénombrement	44
3.1	Réunions d'ensembles	44
3.2	Produits cartésiens d'ensembles finis	47
3.3	Applications entre ensembles finis	48
3.4	Parties d'un ensemble fini	50
4	Analyse combinatoire	51
4.1	Tirages successifs avec remise ou p -listes	51
4.2	Tirages successifs sans remise ou arrangements	52
4.3	Tirages simultanés ou combinaisons	53
4.4	Propriétés des coefficients binomiaux	54
5	How To	58

3	Espaces probabilisés finis	59
1	Le langage des probabilités	60
1.1	Expérience aléatoire	60
1.2	Événements aléatoires	60
1.3	Liens avec les opérations ensemblistes	61
1.4	Systèmes complets d'événements	61
2	Probabilité sur un ensemble Ω fini	62
2.1	Exemple fondamental : probabilité uniforme	62
2.2	Notion de probabilité sur un ensemble fini	63
2.3	Propriétés des probabilités finies	64
2.4	Construction d'une probabilité sur un ensemble fini	67
3	Probabilités conditionnelles	69
3.1	Introduction	69
3.2	Probabilité conditionnelle de A sachant B	69
3.3	Formule des probabilités composées	71
3.4	Formule des probabilités totales	72
3.5	Formule de Bayes	73
4	Indépendance en probabilité	74
4.1	Indépendance de deux événements	74
4.2	Indépendance mutuelle de plusieurs événements	76
5	How To	78
4	Les nombres réels	79
1	Opérations dans \mathbb{R}	80
1.1	Addition et multiplication	80
1.2	Puissances entières d'un nombre réel non nul	81
1.3	Identités remarquables : formule du binôme et identité géométrique	81
2	Relation d'ordre sur \mathbb{R}	82
2.1	Compatibilité des opérations et de la relation d'ordre	83
2.2	Majorants et parties majorées	83
2.3	Borne supérieure	84
2.4	\mathbb{R} possède la propriété de la borne supérieure	85
3	Conséquences de la relation d'ordre	86
3.1	Valeur absolue d'un nombre réel	86
3.2	Partie entière d'un réel	88
3.3	Intervalles de \mathbb{R} et convexité	89
4	Droite numérique achevée	91
4.1	Addition et multiplication dans $\overline{\mathbb{R}}$	92
4.2	Relation d'ordre total dans $\overline{\mathbb{R}}$	92
5	Approfondissements	93
5.1	\mathbb{R} a la propriété d'Archimède	93
5.2	Approximation décimale d'un réel	94
5.3	\mathbb{R} est non dénombrable	95
5.4	Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un réel positif	96
5	Fonctions numériques : généralités	99
1	Propriétés des fonctions numériques	100
1.1	Opérations algébriques sur les fonctions	100
1.2	Symétries	100
1.3	Fonctions réelles et ordre	102
1.4	Fonctions monotones	103
2	Fonctions usuelles	106
2.1	Fonctions en escalier	106
2.2	Fonctions polynômes et fonctions rationnelles	107
2.3	Fonctions logarithmes et exponentielles	107
2.4	Fonctions puissances d'exposants réels	111

2.5	Fonctions trigonométriques	113
6	L'ensemble des nombres complexes	115
1	Notation algébrique des nombres complexes	116
1.1	Le nombre complexe i	116
1.2	Parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe	117
1.3	Les nombres réels forment un sous-ensemble de \mathbb{C}	117
1.4	Opérations algébriques dans \mathbb{C}	118
1.5	Conjugaison	120
1.6	Interprétation géométrique	121
2	Notation exponentielle des nombres complexes	122
2.1	Module d'un nombre complexe	122
2.2	Nombres complexes de module 1	123
2.3	Formules d'Euler et Moivre	125
2.4	Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul	126
3	Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe	129
3.1	Racines $n^{\text{ièmes}}$ de 1	129
3.2	Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un nombre complexe quelconque	131
3.3	Calcul des racines carrées en écriture algébrique	133
4	Application aux équations polynomiales, <i>happy end!!</i>	134
4.1	Equations polynomiales de degré 2	134
4.2	Equations polynomiales de degré 3	135
4.3	Equations polynomiales de degré 4	137
4.4	Equations polynomiales de degré supérieur ou égal à 5	139
5	How To	140
7	Polynômes à une indéterminée	143
1	Polynômes à une indéterminée	144
1.1	Définition de l'ensemble $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$	144
1.2	Degré d'un polynôme	145
1.3	Fonction polynomiale associée	145
2	Opérations dans $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$	146
2.1	Addition des polynômes	146
2.2	Multiplication interne dans $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$	147
2.3	Multiplication externe dans $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$	149
2.4	Calculs dans $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$	150
3	Dérivation dans $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$	151
3.1	Polynôme dérivé	151
3.2	Dérivées successives	152
3.3	Formules de Taylor et Taylor Mac Laurin	153
4	Divisibilité dans $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$	155
4.1	Multiples et diviseurs	155
4.2	Théorème Fondamental de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[\mathbf{X}]$	156
4.3	Pratique de la division euclidienne	159
5	Racines d'un polynôme	159
5.1	Caractérisation des racines d'un polynôme	159
5.2	Racines multiples	161
5.3	Conséquences	164
6	Factorisation des polynômes	165
6.1	Factorisation dans $\mathbb{C}[\mathbf{X}]$	165
6.2	Factorisation dans $\mathbb{R}[\mathbf{X}]$	167
7	How To	169

8	Suites réelles	171
1	Généralités sur les suites réelles	172
1.1	Définition des suites de nombres réels	172
1.2	Opérations sur les suites réelles	174
1.3	Suites réelles et ordre	175
2	Suites réelles convergentes	178
2.1	Suites convergentes vers 0	178
2.2	Propriétés des suites convergentes vers 0	180
2.3	Suites convergentes	182
2.4	Propriétés fondamentales des suites convergentes	183
3	Théorèmes de convergence	187
3.1	Opérations algébriques sur les suites convergentes	187
3.2	Convergence par comparaison et encadrement	188
3.3	Convergence des suites monotones	189
3.4	Convergence des suites adjacentes	190
4	Suites divergentes vers $+\infty$ ou $-\infty$	194
4.1	Définitions	194
4.2	Opérations algébriques et limites dans $\overline{\mathbb{R}}$	195
4.3	Comparaisons et limites dans $\overline{\mathbb{R}}$	196
4.4	Limites monotones dans $\overline{\mathbb{R}}$	197
5	How To	198
9	Etude de suites particulières	199
1	Suites de référence	200
1.1	Comportement asymptotique des suites de références	200
1.2	Comparaison des suites de références	201
2	Suites récurrentes	204
2.1	Suites arithmétiques	205
2.2	Suites géométriques	206
2.3	Suites arithmético-géométriques	208
2.4	Suites récurrentes linéaires d'ordre 2	210
2.5	Suites récurrentes : $u_{n+1} = f(u_n)$	213
3	How To	216
10	Limites de fonctions	217
1	Notions de limite	218
1.1	Limite finie au point $a \in \overline{I}$	218
1.2	Extensions de la notion de limite	219
1.3	Unicité de la limite	221
1.4	Limite à gauche et à droite	222
2	Propriétés fondamentales	223
2.1	Caractérisation séquentielle de la limite	223
2.2	Limites finies et fonctions localement bornées	225
2.3	Limites et inégalités	226
3	Théorèmes d'existence de limites	227
3.1	Opérations sur les fonctions possédant une limite	227
3.2	Changement de variable ou composition des limites	228
3.3	Théorème de convergence par encadrement	229
3.4	Cas des fonctions monotones	230
4	Limites des fonctions usuelles	232
4.1	Limites des fonctions trigonométriques	232
4.2	Limites des fonctions exponentielles	232
4.3	Limites de la fonction logarithme	234
4.4	Limites des fonctions puissances	235
4.5	Comparaison des fonctions usuelles	235
5	Etude des branches infinies	236

6	How To	239
11	Comparaison locale des fonctions	241
1	Fonction dominée par une autre fonction	242
2	Fonction négligeable devant une autre fonction	243
3	Fonctions équivalentes au voisinage d'un point	244
3.1	Règles de calculs sur les équivalents	246
3.2	Incompatibilité des équivalents avec l'addition	247
3.3	Quelques équivalents usuels	249
4	Application aux suites réelles	251
5	How To	254
12	Fonctions continues sur un intervalle	255
1	Continuité en un point	256
1.1	Continuité à droite et à gauche	256
1.2	Propriétés fondamentales des fonctions continues en un point	257
1.3	Opérations sur les fonctions continues en un point	258
1.4	Composition des fonctions continues en un point	258
2	Continuité globale	259
2.1	Opérations algébriques sur les fonctions continues	259
2.2	Composée des fonctions continues	259
2.3	Restriction d'une fonction continue	260
2.4	Prolongement par continuité	260
3	Les résultats fondamentaux	263
3.1	Image continue d'un intervalle	263
3.2	Image continue d'un segment	266
3.3	Théorème de la bijection	271
4	Application à l'étude des suites définies implicitement	274
5	How To	276
13	Systèmes d'équations linéaires	277
1	Systèmes d'équations linéaires	278
1.1	Définitions-exemples	278
1.2	Systèmes équivalents	279
1.3	Substitution	280
1.4	Opérations élémentaires sur les lignes	280
2	Résolutions de systèmes particuliers	280
2.1	Systèmes diagonaux	281
2.2	Systèmes triangulaires	281
2.3	Résolution des systèmes triangulaires par remontée	282
2.4	Solutions d'un système triangulaire	282
2.5	Systèmes échelonnés	284
2.6	Définitions	284
2.7	Résolution des systèmes échelonnés	285
3	La méthode du pivot de GAUSS	286
3.1	Théorème Fondamental	286
3.2	Pratique de la méthode de GAUSS	287
4	Structure de l'ensemble des solutions	289
4.1	Résultats basiques	289
4.2	Systèmes de Cramer	289
5	How To solve a system of linear equations	294

14	Calcul Matriciel	295
1	Définition et opérations dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	296
1.1	Définition de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	296
1.2	Egalité de deux matrices	297
1.3	Addition de deux matrices	297
1.4	Multiplication des matrices par un scalaire	297
1.5	Produit de matrices	298
1.6	Transposition	301
1.7	Conjugaison	302
2	Matrices carrées	302
2.1	Exemples importants	302
2.2	Opérations dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	303
2.3	Puissances d'une matrice carrée	304
2.4	Polynômes de matrices	307
3	Matrices inversibles	307
3.1	Définition de $GL_n(\mathbb{K})$	307
3.2	Propriétés des matrices inversibles	308
3.3	Lien fondamental avec les systèmes de CRAMER	309
4	Détermination pratique de l'inverse	312
4.1	Point de vue systèmes d'équations linéaires	312
4.2	Algorithme de GAUSS-JORDAN	313
4.3	Utilisation d'une relation polynomiale	316
5	How To	318
15	Séries numériques	319
1	Généralités	320
1.1	Définition des séries numériques	320
1.2	Opérations algébriques sur les séries	321
1.3	Convergence des séries	322
1.4	Condition nécessaire de convergence	327
2	Séries à termes positifs	328
2.1	Condition nécessaire et suffisante de convergence	328
2.2	Comparaison des séries à termes positifs	329
2.3	Utilisation d'équivalents	329
3	Séries absolument convergentes	330
3.1	Définition et caractérisation	330
3.2	Condition suffisante de convergence	331
4	Conséquences de la convergence absolue	332
4.1	Sommation par paquets	332
4.2	Modification de l'ordre des termes	335
4.3	Convergence des produits de convolution	337
5	Séries de référence	339
5.1	Séries géométriques & dérivées	339
5.2	Séries de RIEMANN	342
5.3	Série exponentielle	344
6	How To	346
16	Espaces probabilisés : cas général	347
1	Probabilité sur Ω	349
1.1	Espace probabilisable (Ω, \mathcal{A})	349
1.2	Espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P)	353
1.3	Propriétés usuelles des probabilités	354
1.4	Propriétés de continuité monotones	356
2	Conditionnement	358
2.1	Probabilité conditionnelle	358
2.2	Formule des probabilités composées	359

2.3	Formule des probabilités totales	360
2.4	Formule de Bayes	361
3	Indépendance en probabilité	361
3.1	Indépendance de deux sous-tribus	361
3.2	Indépendance d'une famille d'événements	362
4	How To	364
17	Variables aléatoires réelles	365
1	Variables aléatoires réelles finies	367
1.1	Définition-Exemples	367
1.2	Fonction d'une variable aléatoire réelle finie	367
2	Loi de probabilité d'une variable aléatoire finie	368
2.1	Définition	368
2.2	Propriétés des lois de probabilités	368
2.3	Loi d'une fonction d'une variable aléatoire réelle finie	369
2.4	Fonction de répartition	370
3	Moments d'une variable aléatoire réelle finie	372
3.1	Espérance d'une variable aléatoire réelle finie	372
3.2	Variance	374
3.3	Moments d'ordre r	376
4	Variables aléatoires discrètes infinies	376
4.1	Généralités sur les variables aléatoires réelles discrètes	376
4.2	Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle discrète	379
4.3	Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète	381
4.4	Espérance d'une variable aléatoire réelle discrète	384
4.5	Moments d'ordre supérieur	388
5	How To	390
18	Lois discrètes usuelles	391
1	La loi uniforme	393
2	La loi hypergéométrique	394
3	La loi de Bernoulli	397
4	La loi binomiale	398
5	La loi géométrique	399
6	Loi de Poisson	402
7	How To	403
19	Espaces vectoriels	405
1	Espaces vectoriels sur \mathbb{K}	408
1.1	Structure algébrique	408
1.2	Calculs dans un espace vectoriel	409
1.3	Exemples d'espaces vectoriels	410
2	Sous-espaces vectoriels	412
2.1	Définition et caractérisation	412
2.2	Exemples de sous-espaces vectoriels	414
2.3	Intersection de sous-espaces vectoriels	417
2.4	Sommes de sous-espaces vectoriels	418
3	Familles de vecteurs	421
3.1	Sous-espace vectoriel engendré par une partie	421
3.2	Famille génératrice	423
3.3	Famille libre	425
3.4	Base d'un espace vectoriel	430
3.5	Exemples de bases	432
4	How To	434

20 Applications linéaires	437
1 Généralités	438
1.1 Définitions	438
1.2 Isomorphismes	439
1.3 Opérations sur les applications linéaires	441
2 Noyau et image d'une application linéaire	443
2.1 Image directe d'un s.e.v. par une application linéaire	443
2.2 Image réciproque d'un s.e.v. par une application linéaire	444
3 Image d'une famille de vecteurs	446
3.1 Image d'une famille génératrice	446
3.2 Image d'une famille libre	447
3.3 Caractérisation des isomorphismes	447
4 Exemples d'applications linéaires	448
4.1 Applications linéaires de \mathbb{K}^n dans \mathbb{K}^p	448
4.2 Dérivation des polynômes	450
4.3 Projecteurs et projections	450
4.4 Involutions et symétries	453
5 How To	455
21 Dimension finie	457
1 Espaces vectoriels de dimension finie	458
1.1 Définitions-exemples	458
1.2 Existence de bases	458
1.3 Dimension	460
1.4 Exemple fondamental	462
1.5 Exemples d'espaces vectoriels de dimension finie	464
2 Sous-espaces vectoriels d'un e.v. de dimension finie	465
2.1 Dimension des sous-espaces	465
2.2 Sommes de sous-espaces	467
2.3 Sous-espaces supplémentaires en dimension finie	468
3 Familles de vecteurs d'un e.v. de dimension finie	472
3.1 Familles libres et génératrices dans un e.v. de dimension finie	472
3.2 Rang d'une famille de vecteurs	474
4 Applications linéaires en dimensions finies	475
4.1 Formule du rang	475
4.2 Rang d'une application linéaire	477
5 How To	478
22 Théorie du Rang	479
1 Représentation matricielle des familles de vecteurs	481
1.1 Exemple introductif	481
1.2 Matrice représentative d'un vecteur, d'une famille de vecteurs	481
1.3 Isomorphismes de E_n sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$	482
2 Représentation matricielle des applications linéaires	483
2.1 Exemple introductif	484
2.2 Matrice représentative d'une application linéaire dans des bases	485
2.3 Calcul de l'image d'un vecteur avec la matrice représentative	486
2.4 Isomorphismes de $L_{\mathbb{K}}(E_p, F_n)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	488
2.5 Composition des applications linéaires et produit matriciel	489
3 Rang d'une matrice	491
3.1 Définition	492
3.2 Propriétés du rang des matrices	493
3.3 Calcul du rang d'une matrice par la méthode de GAUSS	495
3.4 Mise en oeuvre	496
4 Conséquences	496
4.1 Etude des familles de vecteurs	496

4.2	Etude d'une application linéaire	498
4.3	Etude d'une matrice	499
4.4	Etude des systèmes d'équations linéaires	500
5	How To	502
23	Dérivation	503
1	Dérivabilité	504
1.1	Fonction dérivable en un point	504
1.2	Fonction dérivée	508
1.3	Opérations algébriques sur les fonctions dérivables	508
1.4	Fonctions dérivées des fonctions usuelles	511
2	Théorèmes fondamentaux	515
2.1	Extremums locaux d'une fonction dérivable	515
2.2	Théorème de ROLLE	515
2.3	Théorèmes des ACCROISSEMENTS FINIS	516
2.4	Fonctions monotones dérivables	518
2.5	Exemple d'utilisation des accroissements finis	519
3	Dérivées d'ordre supérieur	521
3.1	Définition	521
3.2	Opérations algébriques sur les fonctions n fois dérivables	522
4	Convexité	525
4.1	Définitions	525
4.2	Inégalité des cordes	525
4.3	Les pentes sont croissantes	526
4.4	Inégalité des tangentes	528
4.5	Point d'inflexion	529
4.6	Inégalités et convexité	530
5	How To	531
24	Intégration sur un segment	535
1	Construction de l'intégrale	537
1.1	Intégrale des fonctions en escalier	537
1.2	Intégrale des fonctions continues sur un segment	539
2	Propriétés de l'intégrale	541
2.1	Linéarité	541
2.2	Relation de Chasles	543
2.3	Estimations d'intégrales	544
2.4	Valeur moyenne	546
3	Lien fondamental entre intégrales et primitives	546
3.1	Intégrale fonction de sa borne supérieure	546
3.2	Primitives d'une fonction continue sur un intervalle	547
3.3	Théorème fondamental du calcul intégral	548
3.4	Accroissements finis des fonctions de classe \mathcal{C}^1	549
4	Calculs d'intégrales	550
4.1	Intégration à vue	550
4.2	Intégration par opérations algébriques	551
4.3	Intégration par parties	551
4.4	Changement de variable	552
5	Applications	554
5.1	Sommes de Riemann	554
5.2	Equations différentielles du premier ordre	555
5.3	Prolongement des fonctions de classe \mathcal{C}^n	557
6	How To	558

25 Formules de Taylor et développements limités	561
1 Formules de Taylor	562
1.1 Polynômes de Taylor d'une fonction de classe C^n	562
1.2 Formule de Taylor avec reste intégrale	563
1.3 Formule de Taylor-Lagrange	565
1.4 Formule de Taylor-Young	566
2 Développements limités	567
2.1 Généralités	567
2.2 Propriétés	568
2.3 Développements limités des fonctions usuelles	570
2.4 Opérations sur les développements limités	571
2.5 Applications des développements limités	574
3 How To	577
26 Vecteurs aléatoires discrets	579
1 Couples de variables aléatoires	580
1.1 Loi conjointe	580
1.2 Lois marginales	583
1.3 Lois conditionnelles	585
1.4 Indépendance de deux variables aléatoires	587
1.5 Loi d'une fonction d'un couple de variables aléatoires	588
2 Moments	591
2.1 Propriétés de l'espérance	591
2.2 Variance d'une somme et covariance	595
3 Vecteurs aléatoires	597
3.1 Loi conjointe de X_1, \dots, X_n , lois marginales	598
3.2 Indépendance de n variables aléatoires	598
3.3 Somme de n variables aléatoires	598
4 Convergence et approximations	602
4.1 Loi faible des grands nombres	602
4.2 Convergence en loi	604
5 How To	607
27 Réduction des endomorphismes	609
1 Réduction des endomorphismes	611
1.1 Endomorphismes diagonalisables	611
1.2 Éléments propres d'un endomorphisme	611
1.3 Valeurs propres d'un endomorphisme	613
1.4 Sous-espaces propres	616
1.5 Caractérisations des endomorphismes diagonalisables	619
2 Réduction des matrices carrées & Applications	623
2.1 Changement de base	623
2.2 Matrices diagonalisables	627
2.3 Exemples de diagonalisations	629
2.4 Applications	632
3 How To	634
28 Fonctions numériques de deux variables réelles	635
1 Préliminaires topologiques	636
1.1 Structure affine de \mathbb{R}^2	636
1.2 Structure euclidienne	637
1.3 Structure topologique	639
2 Fonctions de deux variables	642
2.1 Graphes et courbes de niveaux	642
2.2 Exemples	643
2.3 Fonctions partielles	644

3	Continuité des fonctions de deux variables	645
3.1	Définitions	645
3.2	Opérations sur les fonctions continues	646
3.3	Propriétés fondamentales des fonctions continues	648
3.4	Etude de la continuité de quelques fonctions	650
4	Calcul différentiel de deux variables	650
4.1	Développement limité à l'ordre 1	650
4.2	Dérivées partielles	651
4.3	Fonctions de classe $C^1(D)$	652
4.4	Gradient des fonctions de classe $C^1(D)$	654
5	How To	656
29	Statistique descriptive	657
1	Description statistique d'une population	658
1.1	Population, individus, échantillons	658
1.2	Caractères quantitatifs et qualitatifs	658
1.3	Séries statistiques associées à un échantillon	659
2	Représentations d'une série statistique	660
2.1	Diagrammes en bâtons pour un caractère qualitatif	660
2.2	Diagrammes en bâtons pour un caractère quantitatif discret	661
2.3	Histogrammes pour les caractères quantitatifs continus	661
3	Caractéristiques de position et de dispersion	662
3.1	Caractéristiques de position	662
3.2	Caractéristiques de dispersion	664