Chapitre 1

Notions de base

Sommaire

Motivation

Ce premier chapitre a pour but de rappeler les opérations élémentaires sur les ensembles, ainsi que les notions d'applications, suites et équations. Ces *notions de base* seront utiles tout au long du cours : la théorie des ensembles sera notamment utilisée au chapitre suivant -*Dénombrement*- ainsi que dans tout le cours de *probabilités*. Les applications et les suites forment le socle sur lequel reposera toute l'*Analyse* de première et deuxième année -étude des fonctions réelles d'une variable, suites numériques, séries numériques, *etc*. Enfin, la notion d'équation est essentielle en mathématique, non seulement en *Algèbre linéaire* -systèmes d'équations linéaires- mais aussi en *Algèbre*- nombres complexes, polynômes- ou encore en *Analyse* -équations différentielles.

Vous l'avez compris : l'intitulé de ce chapitre ne présume en rien de la facilité d'appréhender puis d'assimiler ce chapitre ! Bien au contraire, vous aurez certainement à revenir régulièrement sur ce chapitre tout au long de l'année.

Bonne lecture !

1 Notions sur les ensembles

Vous connaissez déjà tout (ou presque) du contenu de ce paragraphe. Il ne s'agit que de fixer les notations que nous utiliserons dans tout le cours.

1.1 Appartenance

Définition : *On appelle* ***ensemble*** *une collection d'objets. Ces objets s'appellent les* ***éléments*** *de l'ensemble.*

Notation : *Si E est un ensemble et si x est élément de E, on note $x \in E$. On dit aussi que x* ***appartient*** *à E. Lorsque x n'est pas élément de E, on note $x \notin E$.*

Un ensemble est caractérisé par la donnée de ses éléments. La manière **la plus simple** de définir un ensemble consiste à dresser la liste de ces éléments :
- le **singleton** $\{a\}$,
- la **paire** $\{a; b\}$,
- $\{10, 15, 2\}$

Cependant, il **n'est pas toujours possible** de dresser la liste de tous les éléments :
- soit parce qu'il y a trop d'éléments : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont des ensembles qui possèdent une infinité d'éléments.
- soit parce qu'il n'y en a pas ! C'est le cas pour l'ensemble vide, noté $\emptyset$ qui a la particularité de ne posséder aucun élément.

1.2 Inclusion, égalité

Définition : *Soient E, F deux ensembles.*

1. *On dit que E* ***est inclus dans*** *F si tout élément de E est élément de F. On note $E \subset F$.*
2. *On dit que E et F sont* ***égaux*** *si $E \subset F$ et $F \subset E$. On note $E = F$.*

COMMENTAIRES : en clair, deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments.

Exemples : $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 15\}$, $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 2\}$.

Remarque : On ne change pas l'ensemble en modifiant l'ordre de ses éléments ou en les répétant.

Exercice : Que pouvez-vous dire de $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{1, 2, 4, 5\}$?

Vocabulaire : Lorsque $E \subset F$, on dit que E est un **sous-ensemble** de F, ou bien que E est une **partie** de F.

Définition : *Soit E un ensemble. L'ensemble dont les éléments sont les parties de E est noté $\mathscr{P}(E)$.*

Remarque : Soit E un ensemble, alors $\emptyset \subset E$, $E \subset E$.
Soient E et F deux ensembles, alors $E \subset F$ se traduit par $E \in \mathscr{P}(F)$.
Soit a un objet et E un ensemble, alors $a \in E$ se traduit par $\{a\} \in \mathscr{P}(E)$ ou bien encore $\{a\} \subset E$.

Exercice : Soit $E = \emptyset$. Quel est $\mathscr{P}(E)$? Soit $E = \{1, 2, 3\}$, quel est l'ensemble des parties de E ?

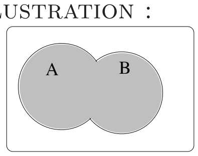
Exemples : Une manière très pratique pour définir[1] une partie d'un ensemble E, consiste à *sélectionner* les éléments de E *qui vérifient une propriété* :
- $]-1, 7] = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x \leq 7\}$
- $5.\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} |$ 5 divise $n\}$

1.3 Opérations élémentaires dans $\mathscr{P}(E)$

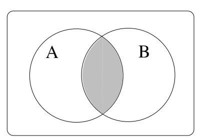
Définition : *Soient E un ensemble, $A, B \in \mathscr{P}(E)$, on définit*

1. *$A \cup B = \{x \in E |\ x \in A$ ou $x \in B\}$, la **réunion** de A et B.*
2. *$A \cap B = \{x \in E |\ x \in A$ et $x \in B\}$, l'**intersection** de A et B.*
3. *$\complement_E A = \{x \in E |\ x \notin A\}$, le **complémentaire** de A dans E.*
4. *$A \setminus B = \{x \in E |\ x \in A$ et $x \notin B\} = A \cap \complement_E B$, la **différence** de A et B.*

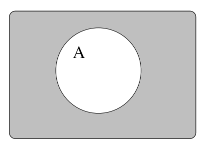
ILLUSTRATION :



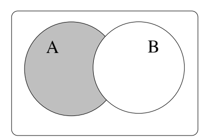
Les éléments de $A \cup B$ sont les éléments de E qui appartiennent à A **ou** à B



Les éléments de $A \cap B$ sont les éléments de E qui appartiennent à A **et** à B



Les éléments de $\complement_E A$ sont les éléments de E qui n'appartiennent pas à A



Les éléments de $A \setminus B$ sont les éléments de E qui appartiennent à A **mais pas** à B.

Vocabulaire : on dit que deux parties A et B sont **disjointes** lorsque $A \cap B = \emptyset$.

Remarques :

1. Pour toutes parties A et B de E, $A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset A$.
2. Dire que $x \in \complement_E A$ signifie précisément $x \in E$ et $x \notin A$! !

Exercice : Déterminez $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\complement_{\mathbb{R}} A$, lorsque A et B sont les intervalles réels définis par :

$$A =]0, 2], \quad B = [1, 3].$$

1.4 Propriétés des opérations élémentaires

Les règles de calcul pour les opérations élémentaires entre parties sont simples à retenir :

Proposition 1.1.— Soient A, B deux parties d'un ensemble E.

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$
3. $A \cap B = B \cap A$
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

[1] ou décrire

Proposition 1.2.— Soient A, B, C des parties d'un ensemble E.

1. L'intersection est distributive sur la réunion : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
2. La réunion est distributive sur l'intersection : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Démonstration $\triangledown$
1. Soit x un élément de $A \cap (B \cup C)$. Par définition x est élément de A et de $B \cup C$. Deux cas sont possibles
- soit x est élément de B, auquel cas, x appartient en fait à $A \cap B$,
- soit x est élément de C, auquel cas x appartient en fait à $A \cap C$.

Dans tous les cas, x appartient à $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.
Réciproquement si x est élément de $(A \cap B) \cup (A \cap C)$, là encore deux cas sont possibles :
- si x est élément de $A \cap B$, alors x appartient à A et à B,
- si x est élément de $A \cap C$, alors x appartient à A et à C.

Comme $B \subset B \cup C$ et $C \subset B \cup C$, il en résulte que dans tous les cas x appartient à $A \cap (B \cup C)$.

2. La preuve est tout à fait similaire :
Soit x un élément de $A \cup (B \cap C)$. Par définition, x est élément de A, ou x est élément de $B \cap C$:
- si x appartient à A, alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$.
- si x appartient à $B \cap C$, alors $x \in B$ et $x \in C$. Par conséquent $x \in B \cup A$ et $x \in C \cup A$.

Dans tous les cas, x appartient à $(A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Réciproquement, soit x un élément de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$. Nous distinguons deux cas :
- si x appartient à A, alors x est *a fortiori* élément de $A \cup (B \cap C)$.
- si x n'appartient pas à A, comme x est élément de $A \cup B$, c'est donc que x appartient à B. De même, comme x est élément de $A \cup C$, mais pas de A, c'est qu'il appartient à C. Ainsi, x appartient à $B \cap C$.

Dans tous les cas, nous avons démontré que x est élément de $A \cup (B \cap C)$. $\blacktriangle$

Intéressons-nous à présent aux propriétés du complémentaire. Par définition, pour toute partie $A \in \mathscr{P}(E)$,

$$A \cap \complement_E A = \emptyset \quad \text{et} \quad A \cup \complement_E A = E.$$

Ces deux propriétés caractérisent le complémentaire :

Proposition 1.3.— Caractérisation du complémentaire
Soient A et B des parties d'un ensemble E,

$$B = \complement_E A \text{ si et seulement si } A \cup B = E \text{ et } A \cap B = \emptyset$$

Commentaires : intuitivement cela signifie que le complémentaire de A est la plus petite partie de E qu'il faut rajouter à A pour recouvrir E.

Démonstration $\triangledown$
• *Supposons* que $B = \complement_E A$.
Montrons que $A \cap \complement_E A$ est vide.
Supposons au contraire qu'il existe un élément x dans $A \cap \complement_E A$. En ce cas, x appartient à A et x n'appartient pas à A, ce qui est absurde. $A \cap \complement_E A$ ne peut donc contenir aucun élément, c'est l'ensemble vide.
Montrons que $E = A \cup \complement_E A$.
Il est clair que $A \cup \complement_E A \subset E$, il suffit donc de prouver que tout élément de E appartient à A ou à $\complement_E A$.
Soit donc x un élément de E, deux cas se présentent :
- si $x \in A$, c'est parfait !
- si $x \notin A$, alors par définition, x appartient à $\complement_E A$.

Dans les deux cas, $x \in A \cup \complement_E A$.
Conclusion : $E = A \cup \complement_E A$.

• Réciproquement, *supposons* que $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$. On *montre* que $B = \complement_E A$.
Soit $x \in \complement_E A$. Par définition, cela signifie que $x \in E$ et $x \notin A$. Puisque par hypothèse $E = A \cup B$

x appartient à A ou à B. Comme x n'appartient pas à A, il est nécessairement élément de B. Ceci prouve que $\complement_E A \subset B$.
D'autre part, soit $x \in B$. Comme par hypothèse $A \cap B = \emptyset$, je suis sûr que x n'appartient pas à A. Mais c'est dire précisément que $x \in \complement_E A$. Ainsi $B \subset \complement_E A$.
Conclusion : si $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$, alors $B = \complement_E A$. ▲

Cette caractérisation permet d'obtenir facilement les propriétés suivantes :

Corollaire 1.4.— Soient A, B deux parties d'un ensemble E, alors

1. $B = \complement_E A$ si et seulement si $A = \complement_E B$.
2. $\complement_E \complement_E A = A$

L'opération "passage au complémentaire" se comporte bien vis-à-vis des deux autres opérations :

Proposition 1.5.— PROPRIÉTÉS DU PASSAGE AU COMPLÉMENTAIRE[2]
Soient A, B deux parties d'un ensemble E, alors :

1. $\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$.
2. $\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$.

Retenez que :
- le *complémentaire* d'une **réunion** est l' **intersection** des *complémentaires*,
- le *complémentaire* d'une **intersection** est la **réunion** des *complémentaires*.

Démonstration ▽

1. Pour démontrer que $C = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$ est le complémentaire de $A \cup B$ dans E, nous utilisons la caractérisation ci-dessus. Il nous suffit de démontrer que $C \cup (A \cup B) = E$ et $C \cap (A \cup B) = \emptyset$. Ces calculs reposent sur les propriétés d'associativité et de distributivité rappelées plus haut.

$$\begin{aligned}
C \cup (A \cup B) &= (A \cup C) \cup (B \cup C) \\
&= \big(A \cup (\complement_E A \cap \complement_E B)\big) \cup \big(B \cup (\complement_E A \cap \complement_E B)\big) \\
&= \big((A \cup \complement_E A) \cap (A \cup \complement_E B)\big) \cup \big((B \cup \complement_E A) \cap (B \cup \complement_E B)\big) \\
&= (A \cup \complement_E B) \cup (B \cup \complement_E A) \\
&= (A \cup \complement_E A) \cup (B \cup \complement_E B) \\
&= E
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C \cap (A \cup B) &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \\
&= \big(A \cap (\complement_E A \cap \complement_E B)\big) \cup \big(B \cap (\complement_E A \cap \complement_E B)\big) \\
&= \big((A \cap \complement_E A) \cap \complement_E B\big) \cup \big((B \cap \complement_E B) \cap \complement_E A\big) \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

2. Pour démontrer que $D = \complement_E A \cup \complement_E B$ est le complémentaire de $A \cap B$ dans E, on est amené à des calculs tout à fait analogues aux précédents.

3. Supposons que A soit inclus dans B. Il existe alors une partie D de E telle que $B = A \cup D$. Appliquons le 1. Il vient :

$$\complement_E B = \complement_E(A \cup D) = \complement_E A \cap \complement_E D \subset \complement_E A.$$

▲

[2]Ces propriétés sont aussi appelées Lois de Morgan

1.5 Produit d'ensembles

Définition : *Soient x et y deux objets. On appelle* ***couple*** (x, y) *la suite formée de deux objets dont le premier est x et le second est y.*

Warning : Ne confondez pas le couple (x, y) avec la paire $\{x, y\}$, c'est tout à fait différent.

Retenez que :

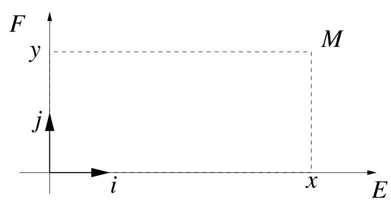
$$\boxed{(x, y) = (x', y') \text{ si et seulement si } x = x' \text{ et } y = y'.}$$

Définition : *Soient E, F deux ensembles, le* ***produit cartésien*** *de E et F est l'ensemble, noté $E \times F$ dont les éléments sont les couples (x, y), $x \in E$, $y \in F$.*

$$E \times F = \{(x, y) |\ x \in E, y \in F\}.$$

Exemple : Formons le produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Les éléments de ce produit sont les couples (x, y) de nombres réels. On peut se représenter cet ensemble de la manière suivante : munissons le plan $\mathcal{P}$ d'un repère (O, i, j) et associons à tout couple $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ le point $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées (x, y). Ceci nous permet d'identifier $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ au plan $\mathcal{P}$.

ILLUSTRATION :



Remarque : Servez-vous de l'illustration précédente pour représenter tout produit d'ensembles.

Proposition 1.6.— PROPRIÉTÉS DU PRODUIT CARTÉSIEN

1. $E \times F = \emptyset$ *si et seulement si* $E = \emptyset$ ou $F = \emptyset$.
2. $(E \times F) \cup (E \times G) = E \times (F \cup G)$.
3. $(E \times F) \cup (G \times F) = (E \cup G) \times F$.
4. $(E \times F) \cap (G \times H) = (E \cap G) \times (F \cap H)$.

Généralisation

Définition : *Soit n un entier naturel, $n \geq 2$. Etant donnés $E_1, E_2, \ldots, E_n$ n ensembles, on définit le* ***produit cartésien*** $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ *par :*

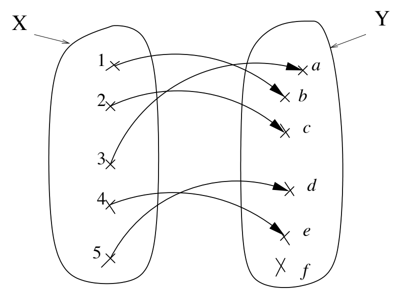
$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n\}.$$

La liste ordonnée $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *s'appelle un* ***n-uplet****.*

2 Applications

2.1 Définition et exemples d'applications

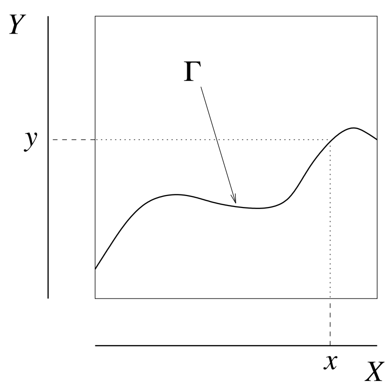
Intuitivement, une application $f : E \to F$ est un *procédé* qui à tout élément de l'ensemble de départ E associe *sans ambiguïté* un unique élément de F. On peut se figurer ce procédé sous la forme d'un diagramme sagittal :
ILLUSTRATION :



Définition : *Soient X, Y deux ensembles et Γ une partie de $X \times Y$. On dit que Γ est le* ***graphe d'une application g*** *si :*

> *Pour* ***tout*** *élément $x \in X$, il existe* ***un unique élément*** *$y \in Y$ tel que le couple (x, y) appartienne à Γ.*

En d'autres termes, à tout élément x de X, "Γ" permet d'associer un unique élément y de Y. Cet élément est appelé ***image*** *de x par g. On le note $g(x)$.*
ILLUSTRATION :



En pratique : on ne décrit pas le graphe d'une application, au contraire on insiste sur le *procédé* qui à x associe son image. C'est pour cela qu'une application g de X vers Y est notée :

$$\begin{array}{rccc} g : & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & g(x) \end{array}$$

Vocabulaire : Soit $g : X \to Y$ une application. Alors

1. X est appelé l'**ensemble de départ**, Y l'**ensemble d'arrivée**,
2. $\Gamma_g = \{(x, y) \in X \times Y |\ y = g(x)\}$ est appelé le **graphe** de g,
3. Pour tout $x \in X$, l'élément $y = g(x)$ de Y est appelé **image** de x par g.
4. Pour tout $y \in Y$, un élément $x \in X$ tel que $y = g(x)$ est appelé un **antécédent** de y par g.

Exemples : Soient E et F deux ensembles.

1. L'application **identité** de E dans lui-même est définie par $\begin{array}{rccc} Id_E : & E & \to & E \\ & x & \mapsto & x \end{array}$

2. Si $A \subset E$, l'**injection canonique** de A dans E est définie par $\begin{array}{rccc} i_A : & A & \to & E \\ & x & \mapsto & x \end{array}$
3. La **projection canonique** de $E \times F$ sur F est définie par $\begin{array}{rccc} p_F : & E \times F & \to & F \\ & (x,y) & \mapsto & y \end{array}$
4. Si $A \in \mathscr{P}(E)$, la fonction **indicatrice** de A est l'application de E vers $\{0,1\}$ qui à tout élément x de E associe $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 \; si \; x \in A \\ 0 \; si \; x \notin A \end{cases}$.

Les exemples ci-dessus sont des applications très générales définies pour tous ensembles E et F. Dans le cas particulier des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, citons par exemple :

1. la fonction carrée $\begin{array}{rccc} q : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$,
2. les fonctions polynomiales $\begin{array}{rccc} p : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 7x^3 - 2x + 2 \end{array}$,
3. la fonction racine carrée $\begin{array}{rccc} \sqrt{.} : & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$,
4. la fonction exponentielle $\begin{array}{rccc} \exp : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^{+\star} \\ & x & \mapsto & e^x \end{array}$.

Le procédé $x \mapsto \dfrac{2x+3}{x-3}$ ne définit pas une application de $\mathbb{R}$ dans lui-même[3].

Notation : *Soient E, F deux ensembles. L'ensemble des applications de E vers F est noté $\mathscr{F}(E,F)$, ou bien F^E.*

Définition : *Deux applications $f, g : E \to F$ sont dites **égales**, et on note $f = g$ lorsque $\Gamma_f = \Gamma_g$. Ceci se traduit par :*

$$\boxed{\textit{Pour tout élément } x \in E, \quad f(x) = g(x)}$$

Composée d'applications

Proposition 1.7.— Soient $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ deux applications.
On définit pour tout $x \in X$,

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

Le procédé de X vers Z défini par $(x \in X) \mapsto (g \circ f)(x))$ est une application, appelée la **composée** de f et g.

Démonstration ▽
• Soit $x \in X$ alors $f(x) \in Y$ puisque $X \xrightarrow{f} Y$. Comme $g : Y \to Z$ est définie sur Y, $g(f(x))$ est bien défini et appartient à Z. Tout élément x a bien (au moins) une image par $g \circ f$.
• Montrons que cette image est unique :
Soit $x \in X$ et $(z, z') \in Z^2$, tels que $g \circ f(x) = z$ et $g \circ f(x) = z'$. Posons $y = f(x) \in Y$: il vient $g(y) = z$ et $g(y) = z'$. Comme g est une application, ceci implique que $z = z'$. ▲

Attention : pour que la composée de deux applications ait un sens, il est nécessaire que l'ensemble d'arrivée de la première soit contenu dans l'ensemble de départ de la deuxième !

Exemple : Soient f et g les applications définies par :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 1 + x^3 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} g : & \mathbb{R}^{+\star} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \ln y \end{array}$$

L'application $f \circ g$ est bien définie et pour tout $y \in \mathbb{R}^{+\star}$, $(f \circ g)(y) = 1 + (\ln y)^3$.
En revanche, $g \circ f$ n'est pas définie.

[3] pourquoi ?