1

Polynômes et arithmétique

• ✍ **1 — CCP ABORDABLE TOUTES FILIÈRES**

Soient x, y et z trois complexes non nuls tels que $x + y + z = 0$ et $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Montrer que $|x| = |y| = |z|$.

? **Indication**

Introduire un polynôme dont les racines sont x, y et z. Les racines ont, par le cours, un lien avec les coefficients (penser à réduire la seconde condition au même dénominateur pour l'exploiter).

• ✍ **2 — CCP ABORDABLE TOUTES FILIÈRES**

Décomposer $\frac{1}{X^4 + X^2 + 1}$ en éléments simples sur $\mathbb{R}[X]$.

? **Indication**

Commencer par décomposer le dénominateur en irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ en posant $Z = X^2$.

• ✍ **3 — CCP ABORDABLE TOUTES FILIÈRES**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre $(z + 1)^n = -(z - 1)^n$ dans $\mathbb{C}$.

? **Indication**

On se ramène à une équation du type $Z^n = 1$, faisant intervenir les racines complexes de l'unité.

• ✍ **4 — CCP ABORDABLE TOUTES FILIÈRES**

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in K$ deux à deux distincts, et $P = \prod_{i=0}^{n}(X - a_i)$. On note $(L_0, \dots, L_n)$ la famille des polynômes de Lagrange associée aux a_i.

a) Rappeler l'expression de chaque $L_i(X)$ sous forme d'un produit. Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est libre.

b) Montrer que pour tout A de $K[X]$ le reste de la division euclidienne de A par P est $\sum_{i=0}^{n} A(a_i)L_i$.

? **Indication**

a) C'est du cours. On refait la preuve demandée.

b) Écrire la division en utilisant que le reste (par son degré et le a)) est une combinaison linéaire de $(L_0, \dots, L_n)$. Les coefficients de cette combinaison se trouveront avec de « bonnes valeurs ».

• ✍ 5 — CCP ABORDABLE TOUTES FILIÈRES

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Factoriser $P(X) = X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, puis $\mathbb{R}[X]$.

? Indication

On pourra d'abord poser $Z = X^n$. Puis on factorisera sur $\mathbb{C}[X]$ en utilisant la factorisation du cours :

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (X - \exp(2ik\pi/n)).$$

Pour la factorisation sur $\mathbb{R}[X]$: on regroupera les termes conjugués deux à deux.

• ✍ 6 — CCP ABORDABLE TOUTES FILIÈRES

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $X^2 + X + 1$ divise $P_n(X) = X^{2n} + aX^n + b$.

? Indication

Chercher quand les (célèbres) racines de X^2+X+1 sont également racines de $P_n(X)$. On pourra vérifier que ceci revient à $j^{2n} + aj^n + b = 0$, j étant le complexe bien connu... raisonner alors sur les valeurs de n modulo 3...

• ✍ 7 — CCP ABORDABLE TOUTES FILIÈRES

Soit $n \geq 3$. Factoriser le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$ en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$, puis $\mathbb{R}[X]$.

? Indication

Cet exercice n'a l'air de rien et pourtant il est assez mal traité en général : les décompositions en irréductibles sont très mal maîtrisées. On rappelle les étapes :

∗ sur $\mathbb{C}[X]$: chercher les racines en résolvant $P(z) = 0$ (ici on remarquera une somme géométrique). Si on les a toutes, on peut factoriser (ne pas oublier le coefficient dominant).

∗ sur $\mathbb{R}[X]$: on regroupe les termes conjugués dans la factorisation précédente. Seul problème : qui est conjugué avec qui ?

• ✍ 8 — CCP ABORDABLE TOUTES FILIÈRES

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de l'endomorphisme :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (2X+1)P - (X^2-1)P' \end{array} \right.$$

? Indication

Chercher les $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul tels que $f(P) = \lambda P$. On peut tout d'abord chercher une condition nécessaire portant sur le terme dominant de P, ce qui rend les calculs plus humains. On peut aussi (seconde option) se ramener à la résolution d'une équation différentielle.

• ✍ 9 — ÉCOLE NAVALE ABORDABLE TOUTES FILIÈRES

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) *Démontrer l'existence/unicité d'un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que (on rappelle que $\text{cotan} = \dfrac{\cos}{\sin}$) :*

$$\forall x \in]0, \pi/2[, P_n(\text{cotan}^2(x)) = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin^{2n+1}(x)}$$

b) *Déterminer les racines de P_n et leur somme.*

c) *Montrer que :* $\forall x \in]0, \pi/2[, \text{cotan}^2(x) \leq 1/x^2 \leq 1 + \text{cotan}^2(x)$.

d) *En déduire que :* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2 = \pi^2/6$.

? Indication

⚠ *L'exercice transmis est assez long, il pourrait faire l'objet d'une sympathique petite partie de problème d'écrit avec quelques questions intermédiaires. Il n'en reste pas moins très intéressant...*

a) $*$ Existence : *développer* $\sin((2n+1)x) = \text{Im}[(\exp(ix))^{2n+1}]$ *puis binôme de Newton, etc.*

   $*$ Unicité : *si un second polynôme Q_n satisfait la relation de l'énoncé, alors $P_n - Q_n$ va avoir beaucoup trop de racines pour être honnête.*

b) *On sait quand $\text{cotan}^2(x)$ est racine de P_n et on peut donc construire ainsi n racines distinctes (à justifier) de P_n. La somme des racines d'un polynôme est une formule du cours.*

c) *La majoration de droite repose sur une majoration usuelle, celui de gauche peut se faire par une petite étude de fonctions.*

d) *Utiliser le a) et le b). Et aller se reposer.*

• ✍ **10 — ÉCOLE NAVALE ABORDABLE TOUTES FILIÈRES**

Soit $n \geq 2$.

a) Rappeler l'expression des solutions de l'équation $z^n = 1$ *d'inconnue* $z \in \mathbb{C}$.

b) On pose pour $k \in [[0, n-1]]$: $\omega_k = \exp(2ik\pi/n)$. *Calculer :*

$$P = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1+\omega_k}{1-\omega_k}.$$

c) En déduire la valeur du produit $P' = \prod_{k=1}^{n-1} \text{cotan}(k\pi/n)$.

? **Indication**

a) C'est du cours de première année (racines complexes n*-ièmes de l'unité).*

b) On pourra utiliser la factorisation du cours : $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega_k)$.

c) Calculer P *d'une seconde manière, en utilisant les formules d'Euler.*

• ✍ **11 — ESM SAINT-CYR ABORDABLE TOUTES FILIÈRES**

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ *et* f *qui à* $P \in E$ *associe le reste de la division euclidienne de* AP *par* B*, où* $A = X^4 - 1$ *et* $B = X^4 - X$.

a) Montrer que f *est un endomorphisme de* $\mathbb{R}_3[X]$.

b) Noyau et image de f *?*

? **Indication**

a) On rappelle le théorème de division euclidienne, particulièrement martyrisé par les élèves : soient $A \in \mathbb{R}[X]$ *et* $B \in \mathbb{R}[X]$, B *non nul. Alors :*

$$\exists!(Q,R) \in (\mathbb{R}[X])^2, \begin{cases} A = & BQ + R \\ d(R) \leq & d(B) - 1 \end{cases}$$

Le tout va reposer sur une scrupuleuse application de ce théorème.

b) $*$ *Pour le noyau : on remarquera que tout polynôme du noyau a des racines triviales en décomposant* A *et* B *en irréductibles sur* $\mathbb{C}[X]$.

$*$ *Pour l'image : de même, montrer que tout polynôme de l'image a une racine triviale. Ceci permet d'inclure l'image dans une partie de* $\mathbb{R}_3[X]$ *bien choisie. En regardant les dimensions, on pourra établir une égalité d'ensembles.*

• ✍ 12 — CCP ABORDABLE TOUTES FILIÈRES

Donner une condition nécessaire et suffisante sur les complexes p et q pour que le polynôme $P(X) = X^3 + pX + q$ admette une racine double. Déterminer dans ce cas toutes les racines de P.

? Indication

Une racine double α annule P et P', mais pas P''. On peut alors chercher une condition nécessaire portant sur p et q (en éliminant la racine des équations). Ne pas oublier de vérifier si (ou quand) cette condition est suffisante. Utiliser dans ce cas les relations coefficients racines pour trouver la racine restante.

• ✍ 13 — CCP FILIÈRE MP

Soit n un entier naturel non nul.

a) Montrer qu'il existe un unique couple de polynômes (P, Q) de $\mathbb{R}_{n-1}[X]^2$ tel que

$$(1 - X)^n P(X) + X^n Q(X) = 1$$

b) Montrer que $P(1 - X) = Q(X)$, $Q(1 - X) = P(X)$.

c) Montrer que : $\exists a \in \mathbb{R}$, $(1 - X)P'(X) - nP(X) = aX^{n-1}$. Déterminer a et $P(X)$.

? Indication

a) On reconnaît une équation diophantienne. La résolution est classique.

b) Composer la relation par $1 - X$.

c) On peut penser à la dérivation.

• ✍ 14 — CCP FILIÈRE MP

Soit n un entier naturel non nul. Déterminer l'entier p maximal tel que 2^p divise $\prod_{k=n+1}^{2n} k$.

? Indication

Partir de $(2n)!$ pour obtenir une écriture de $\prod_{k=n+1}^{2n} k$ liée au problème.

• ✍ **15 — CCP FILIÈRE MP**

Quel est le reste de la division euclidienne de $\sum_{k=1}^{10} 10^{(10^k)}$ *par 7 ?*

? **Indication**

Utiliser les congruences et étudier le comportement des puissances de 10 *modulo* 7.

• ✍ **16 — CCP FILIÈRE MP**

a) *Résoudre l'équation :* $(x, y) \in (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^2$, $x^2 + y^2 = \overline{0}$.

b) *Déterminer les points à coordonnées entières de la surface* $\mathcal{S}$ *d'équation :* $x^2+y^2 = 7z^2$.

? **Indication**

a) *Pour* $x \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, *examiner le comportement de* x^2.

b) *Vérifier qu'en dehors de l'origine, qui est clairement solution, un éventuel point solution a toutes ses coordonnées non nulles, et montrer en utilisant la première question et l'homogénéité de l'équation de* $\mathcal{S}$ *que l'origine est le seul point solution.*

• ✍ **17 — CCP FILIÈRE MP**

a) *Déterminer les racines complexes du polynôme* $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$. *En déduire sa décomposition en produit de polynômes irréductibles dans* $\mathbb{R}[X]$.

b) *A partir de la somme des racines cinquièmes de l'unité, déterminer la valeur exacte de* $\cos(\frac{2\pi}{5})$. *Montrer que* $\cos(\frac{2\pi}{5})$ *est irrationnel.*

c) *Montrer que le polynôme* $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ *est irréductible sur* $\mathbb{Q}[X]$.

? **Indication**

La dernière question est réservée aux étudiants de la filière MP.

a) *Penser déjà aux racines cinquièmes de l'unité.*

b) *L'indication donnée suffit pour obtenir la valeur exacte de* $\cos(\frac{2\pi}{5})$. *Supposer alors* $\cos(\frac{2\pi}{5})$ *rationnel ...*

c) *On pourra supposer* $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ *non irréductible sur* $\mathbb{Q}[X]$ *et regarder la forme de la décomposition.*

• ✍ **18 — CCP ABORDABLE TOUTES FILIÈRES**

On rappelle que $j = \exp(2i\pi/3)$. *Soit* $A = \{a + bj \ / \ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$.

a) *Montrer que* A *est un sous-anneau de* $(\mathbb{C}, +, \times)$.

b) *Déterminer l'ensemble des éléments de* A *dont le module est* 1 *(on pourra, pour* $z \in A$*, calculer* $4|z|^2$*). En déduire l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau* A.

? **Indication**

a) *Utiliser la caractérisation d'un sous-anneau.*

b) *L'indication suffit pour la première partie de la question. Pour la fin, comparer l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau* A *et celui des éléments de* A *dont le module est* 1*, en n'oubliant pas qu'un élément inversible d'un anneau est un élément de l'anneau admettant un inverse dans l'anneau !*