

Table des matières

1	Polynômes	9
	<i>Centrale.</i> Factorisation de polynômes en irréductibles	10
	<i>Centrale.</i> Triangle des racines d'un polynôme	11
	X. Carré formé par les racines d'un polynôme	13
	<i>Centrale.</i> Equations linéaires portant sur des polynômes	13
	<i>Mines.</i> Factorisation d'un polynôme/calcul d'un produit	15
	<i>Type X.</i> Polynômes de Tchebycheff	16
	<i>Type X.</i> Calcul de $\zeta(2)$ à l'aide de polynômes	18
	<i>Centrale.</i> Calcul d'un déterminant lié à un polynôme	21
	<i>Type X.</i> Polynômes de Legendre	23
	<i>Centrale.</i> Polynômes scindés à racines simples sur $\mathbb{R}[X]$	25
	X. Sommes des carrés dans un anneau	26
2	Algèbre linéaire, matrices	29
	<i>Type Centrale.</i> Travail sur des rangs	30
	<i>Centrale.</i> Indépendance linéaire d'une famille de fonctions	30
	X. Indice de nilpotence en dimension finie	31
	<i>Type X.</i> Noyaux itérés	32
	<i>Type X.</i> Applications des noyaux itérés	34
	<i>Type X.</i> Produit d'endomorphismes nilpotents qui commutent	35
	X. Equation matricielle sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$	35
	X. Décomposition de l'identité en $uv + vu$	35
	X. Caractérisation des matrices nilpotentes par le spectre	36
	<i>Centrale.</i> Comparaison des rangs de A , tAA et $A{}^tA$	37
	<i>Mines.</i> Hyperplans stables par un endomorphisme	37
	<i>Type X.</i> Centre multiplicatif de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	39
	<i>Mines.</i> Valeur propre commune à deux matrices	41
	X. Somme nilpotente de matrices	41
	<i>Type Mines.</i> Matrices à diagonale dominante	42
	<i>Centrale.</i> Si $AB - BA = B\dots$	43
	<i>Centrale.</i> Cas d'égalité de $\text{Rg}(g \circ f)$ avec $\text{Rg}(g)$, avec $\text{Rg}(f)$	44
	<i>Mines.</i> Projecteurs qui commutent.	45
	<i>Mines.</i> Un crochet de Lie	46
	X. Expression du rang comme un min	47
	<i>Type X.</i> Applications de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ conservant le produit	47
	<i>Type X.</i> Matrices compagnon et commutant d'un cyclique	48
	X. Formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$	50
	X. Monoïde fini de matrices inversibles	51
	<i>Mines.</i> Si $\text{tr}(A^k) = \text{tr}(B^k)$ pour tout $k\dots$	53
	X. Equations matricielles sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$	55
	<i>Type X.</i> Une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ semblable à sa transposée	56
	X. Hyperplans stables et formes linéaires	58
	<i>Centrale.</i> Étude des matrices de trace nulle	60
	<i>Mines.</i> Dualité	63
	X. Une factorisation sur les endomorphismes	64

3	Déterminants	67
	<i>Type Centrale.</i> Déterminant d'une matrice formée de ± 1	68
	<i>Type Mines.</i> Déterminant par blocs	68
	<i>Type Mines.</i> Déterminant par blocs 2	69
	<i>Centrale.</i> Matrices circulantes d'ordre 4	69
	<i>Mines.</i> $\det(A + I_n)$ si $A^2 = 0$	70
	<i>Mines.</i> Inverse d'une matrice à paramètres	71
	<i>Type X.</i> Déterminant des $ a_i - a_j $	72
	<i>Type X.</i> Formule d'inversion matricielle	73
	<i>Mines.</i> Déterminants de Vandermonde	74
	<i>Type X.</i> Déterminant circulant	76
	<i>Type X.</i> Déterminants de Cauchy, de Hilbert	78
4	Réduction	81
	<i>Mines.</i> Caractérisation de certains projecteurs	82
	<i>Mines.</i> Polynôme annulateur	82
	<i>Type Centrale.</i> Polynôme annulateur 2	83
	<i>Mines.</i> Polynôme annulateur 3	83
	<i>Centrale.</i> Spectre et inverses de $\text{Id}_E - uv$ et $\text{Id}_E - vu$	84
	<i>Mines.</i> Diagonalisation de U^tV pour U, V deux colonnes	85
	<i>Type Mines.</i> Réduction d'une matrice creuse	86
	<i>Mines.</i> Éléments propres d'une matrice	87
	<i>Mines.</i> Diagonalisabilité d'une application sur les matrices	88
	<i>Type Mines.</i> Diagonalisation simultanée	89
	<i>X.</i> Diagonalisation simultanée généralisée	89
	<i>Type Centrale.</i> Commutant d'un endomorphisme diagonalisable	90
	<i>Type Mines.</i> Un cas de décomposition des noyaux	92
	<i>Centrale.</i> Etude d'endomorphismes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$	94
	<i>Centrale.</i> Un endomorphisme sur les endomorphismes	95
	<i>Centrale.</i> Trigonalisation d'un endomorphisme nilpotent	97
	<i>Centrale MAPLE.</i> Réduction de matrices à paramètres	99
	<i>Mines.</i> Un spectre non trivial	102
	<i>X.</i> Sous-espaces stables par une matrice	104
	<i>Mines.</i> Caractérisation de la diagonalisabilité	105
	<i>Type X.</i> Diagonalisabilité d'un produit tensoriel d'ordre 2	107
	<i>Centrale.</i> Diagonalisabilité, nilpotence de $f \mapsto f \circ g - g \circ f$	108
	<i>Mines.</i> Diagonalisabilité et hyperplans stables	109
	<i>Centrale.</i> Valeur propre commune	110
	<i>X.</i> Que dire si u^2 est diagonalisable?	111
	<i>X.</i> Diagonalisation par blocs	112
	<i>X.</i> Diagonalisation par blocs 2	113
	<i>X.</i> Diagonalisabilité de u , de $P(u)$ si $P'(u) \in \text{GL}(E)$	115
5	Espaces préhilbertiens ou euclidiens	117
	<i>Centrale.</i> Différence de bases orthonormales directes	118
	<i>Mines.</i> Endomorphismes symétriques et orthogonaux	119
	<i>X.</i> Extrema d'une fonction sur $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}_+^*)$	119
	<i>Centrale.</i> Matrices orthogonales d'ordre 3	120
	<i>X.</i> Trace d'un produit de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$	121
	<i>Centrale.</i> Sur le double produit vectoriel	122
	<i>Mines.</i> Produit scalaire usuel sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, norme du produit	124

<i>Mines</i> . Orthogonalité d'une matrice par blocs	125
<i>Mines</i> . Endomorphisme symétrique sur $\mathbb{R}_n[X]$	126
<i>Type X</i> . Réduction d'une matrice creuse symétrique	127
<i>Centrale</i> . Matrices symétriques positives	128
<i>Mines</i> . Racine carrée d'un endomorphisme symétrique positif	130
<i>Mines</i> . Endomorphismes et matrices antisymétriques	132
<i>Centrale MAPLE</i> . Projection orthogonale dans $\mathbb{R}_{2n}[X]$	134
<i>Type Mines</i> . Orthogonalité des polynômes d'Hermite	136
<i>X</i> . Orthogonalité et minimisation avec les polynômes de Tchebycheff	138
<i>Type X</i> . Orthogonalité des polynômes de Legendre	140
<i>Centrale</i> . Minimisation d'intégrale et projection orthogonale	142
<i>Type X</i> . Matrices de Gram	144
<i>X</i> . Familles obtusangles	146
<i>X</i> . Théorème du minimax de Courant-Fischer	148
<i>Type X</i> . Polynômes orthogonaux associés à un poids	149
6 Géométrie, courbes et surfaces	153
<i>Centrale</i> . Réduction d'une équation de quadrique	154
<i>Centrale</i> . Equation polaire d'un carré	155
<i>Centrale</i> . Etude d'une courbe paramétrée	155
<i>X</i> . Polygone dont les milieux des côtés sont imposés	156
<i>Centrale</i> . Rayon de courbure d'une courbe en polaire	158
<i>Centrale</i> . Isobarycentre de trois points d'une parabole	159
<i>Centrale</i> . Réduction d'une équation de conique	161
<i>Mines</i> . Caractérisation des tangentes à une ellipse	161
<i>Centrale MAPLE</i> . Famille de courbes paramétrées	162
<i>Type Centrale</i> . Normales les plus éloignées d'une ellipse	166
<i>Centrale</i> . Cylindre défini par génératrices et directrice	167
<i>Centrale</i> . Tracé du pentagone régulier à la règle et au compas	168
<i>Type Mines</i> . Définition biaxiale du paraboloid hyperbolique	169
<i>Centrale</i> . Plans tangents contenant une droite donnée	170
<i>Type Centrale</i> . Courbe orthoptique de l'ellipse	171
<i>Centrale</i> . Sommets des paraboles à tangente imposée	173
<i>Type Centrale</i> . Recherche de lieu géométrique	175
<i>Type X</i> . Courbe de \mathbb{R}^2 définie de manière implicite	176
<i>Centrale</i> . Equation cartésienne d'un cône	178
<i>Type X</i> . Lieu du foyer d'une parabole à tangentes prescrites	179
<i>Centrale</i> . Images de parties de l'espace par l'inversion	181
<i>Type X</i> . Equation intrinsèque d'une courbe plane	183
<i>Type X</i> . Equation intrinsèque d'une courbe plane 2	184
<i>Type X</i> . Une surface réglée	184
<i>Type X</i> . Aire de la boucle du folium de Descartes	185
<i>Mines</i> . Tangentes à l'hippopède	187
<i>Centrale</i> . Podaire de l'hyperboloïde	190
<i>Mines</i> . Surface réglée et développable	192

7	Espaces vectoriels normés, suites	195
	<i>Type Centrale.</i> Limites de puissances de matrices	196
	<i>Type Mines.</i> Preuve de la formule de Stirling par Wallis	196
	<i>Mines.</i> Suite de complexes	197
	<i>Mines.</i> Une série spéciale alternée	198
	<i>Type Mines.</i> Limites des racines = racines de la limite	198
	<i>Type X.</i> Développement asymptotique des solutions de $x = \tan(x)$	200
	<i>Mines.</i> Produit infini : convergence, calcul	201
	<i>Type X.</i> Normes de Hölder	203
	<i>X.</i> Radicaux imbriqués	205
	<i>Type X.</i> Lemme de Cesàro, application à $u_{n+1} = \sin(u_n)$	207
	<i>Type X.</i> Cesàro (variante)	209
	<i>Type X.</i> Cesàro (variante 2)	210
	<i>Type X.</i> Suite récurrente linéaire d'ordre 3	211
	<i>Mines.</i> Limite de $\sin(2\pi n!e)$	213
	<i>X.</i> Théorème de Korovkin	214
	<i>Centrale.</i> Méthode de Newton sur les matrices	216
	<i>X.</i> Equivalent d'un produit en $+\infty$	220
	<i>X.</i> Normes subordonnées et sous-groupes bornés de $GL_n(\mathbb{C})$	222
8	Fonction d'une variable réelle	227
	<i>X.</i> Une majoration	228
	<i>Centrale MAPLE.</i> Fonction définie par une intégrale	228
	<i>Mines.</i> Intégration des relations de comparaison : application	230
	<i>Centrale.</i> Point fixe d'une fonction $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$	232
	<i>X.</i> Une fonction qui augmente les distances	233
	<i>Centrale.</i> Une équation fonctionnelle	234
	<i>X.</i> Limite pour $f \implies$ limite pour f' ?	235
	<i>X.</i> Etude d'une suite d'intégrales	237
9	Intégration	239
	<i>Centrale.</i> Intégrales à valeurs complexes	240
	<i>Centrale.</i> Suite simple, définie par des intégrales	241
	<i>Centrale MAPLE.</i> Calcul d'une intégrale	242
	<i>Mines.</i> Calcul d'une intégrale impropre	243
	<i>Mines.</i> Calcul de $\int_0^1 xE(1/x)dx$	244
	<i>Mines.</i> Equivalent d'une intégrale à paramètre	245
	<i>Type Centrale.</i> Permutation somme/intégrale	246
	<i>Mines.</i> Une propriété géométrique de l'intégrale	247
	<i>Centrale.</i> Fonction implicitement définie par une intégrale	248
	<i>Centrale MAPLE.</i> Développement asymptotique d'une suite	249
	<i>X.</i> Etude d'une suite d'intégrales	252
	<i>Mines.</i> Intégrale à paramètre dans les bornes	254
	<i>X.</i> Calcul d'une intégrale par ses sommes de Riemann	257
	<i>Mines.</i> Transformée de Laplace d'arctan	259
	<i>Type X.</i> Equivalent d'une intégrale à paramètre	261
	<i>Centrale.</i> Equivalents d'une transformée de Laplace	262
	<i>Centrale.</i> Intégrale dépendant d'un paramètre	264
	<i>Type X.</i> Transformée de Fourier de la loi normale	266
	<i>Type Mines.</i> Permutation somme/intégrale	268

Centrale MAPLE. Intégrales dépendant d'un paramètre	269
Mines. Convergence et valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$	273
Mines. Intégrale à paramètre vs. série de fonctions	275
Type X. Variante du lemme de Lebesgue	277
Mines. Une question d'intégrabilité	279
Type X. Equivalent d'une intégrale à paramètre	281
Centrale. Suite récurrente et intégrales à paramètre	282
Centrale. Théorème de la limite centrée	285
10 Séries numériques	289
Mines. Equivalent de $\sum_{k=1}^n k^k$ lorsque $n \rightarrow +\infty$	290
Centrale. Convergence d'une série à paramètres	290
Mines. Développement asymptotique	291
Centrale. Développement asymptotique 2	292
Mines. Développement asymptotique 3	293
Centrale. Séries et produits numériques	294
Mines. Etude impliquant une série de Bertrand	296
Mines. Etude de $\sum_0^1 f(x)x^n dx$	297
Type X. Sur la série des u_n lorsque $(u_n)_n$ est décroissante	299
X. Approximations d'un réel par des séries pseudo-alternées	301
X. Décomposition en série factorielle d'un réel	303
11 Séries de fonctions, de Fourier	305
Mines. Calcul de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$	306
Mines. Convergence simple, normale d'une série de fonctions	307
Mines. Inégalité isopérimétrique (ou de Wirtinger)	309
X. Série des primitives itérées d'une fonction	309
Mines. Equivalent d'une série de fonctions	311
Centrale MAPLE. Equivalent d'une série de fonctions 2	312
Type Mines. Etude d'une série de fonctions	315
Centrale. Séries de fonctions monotones	318
Type X. Propriétés de la somme d'une série de fonctions	319
Mines. Série de Fourier par des développements en série entière	321
Type X. Série de Fourier d'une fraction trigonométrique	323
Mines. Calcul d'une somme à l'aide d'une série entière	324
Centrale MAPLE. Transformation d'Abel et série de Fourier	325
12 Séries entières	329
Centrale. Rayons de convergence	330
Mines. Rayon de convergence d'une série entière	330
Mines. Equivalent d'une série entière au bord	330
X. Equivalent d'une série entière au bord 2	332
Centrale. Rayon de convergence et somme d'une série entière	332
Type X. Fonction non développable en série entière	333
Mines. Produit de Cauchy	335
Mines. Développement en série entière	336
Mines. Etude et somme d'une série entière	338
Type Centrale. Matrice et série entière	338

<i>Mines</i> . Noyau de Poisson	339
<i>Type Centrale</i> . Transformée de Laplace d'une série entière	343
<i>Centrale MAPLE</i> . Produit de séries entières	345
<i>Type Mines</i> . Série génératrice des polynômes d'Hermite	347
<i>X</i> . Equivalent au bord d'une série entière lacunaire	349
<i>Centrale MAPLE</i> . Etude d'une série génératrice	351
13 Équations différentielles	355
<i>Type Mines</i> . Système différentiel en $z = x + iy$	356
<i>Type Centrale</i> . Système différentiel antisymétrique	356
<i>Type Mines</i> . Le second membre est une exponentielle-polynôme	357
<i>Type Mines</i> . Equation d'ordre 1 avec raccordement	357
<i>Type Centrale</i> . Solutions maximales d'une équation différentielle	358
<i>Mines</i> . Variations des constantes	359
<i>Mines</i> . Equation différentielle, séries entières et raccordement	361
<i>Type Mines</i> . Séries entières et raccordement pour un second ordre	362
<i>Type X</i> . Série entière, variation de la constante et raccordement	364
<i>Centrale MAPLE</i> . Equation non linéaire, tracé des courbes intégrales	367
<i>Mines</i> . Principe de superposition sur une somme infinie	369
<i>Centrale MAPLE</i> . Système différentiel autonome	370
14 Fonctions de plusieurs variables	373
<i>Type Centrale</i> . Calcul d'une intégrale multiple	374
<i>X</i> . Bornes d'une fonction de trois variables	374
<i>Centrale</i> . Fonctions anisotropes sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$	375
<i>Centrale MAPLE</i> . Extrema d'une fonction de deux variables	376
<i>Type Mines</i> . Changement de variable polaire	378
<i>Centrale</i> . Extrema d'une fonction de deux variables 2	379
<i>Type X</i> . Calcul d'un Laplacien	380
<i>Type Centrale</i> . Calcul d'intégrale par une intégrale double	381
<i>Type X</i> . Centre de masse d'un demi-disque	382
<i>Type Mines</i> . Calcul d'intégrale double	383
<i>Centrale</i> . Difféomorphisme, équation aux dérivées partielles	384
<i>Type Mines</i> . Changement de variables dans une intégrale double	385
<i>Type Centrale</i> . Equation aux dérivées partielles du second ordre	386
<i>Centrale</i> . Optimisation d'intégrales avec contrainte au bord	387
15 Résumé MAPLE	391