► CENTRALE 1 — ***Factorisation de polynômes en irréductibles***

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. Décomposer en produits de facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$, puis $\mathbb{R}[X]$:

a) $N(X) = X^{2n} - 1$.

b) $P(X) = X^{2n} - 2\cos(na)X^n + 1$, *où* $\dfrac{a}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

Réponse

a) • La factorisation sur $\mathbb{C}[X]$ est connue :

$$N(X) = \prod_{k=0}^{2n-1} (X - \exp(ik\pi/n))$$

• Sur $\mathbb{R}[X]$ on regroupe dans la factorisation précédente les termes conjugués deux à deux — les termes pour $k = 0$ et $k = n$ donnent des irréductibles de degré 1 de $\mathbb{R}[X]$:

$$N(X) = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1} \underbrace{((X - \exp(ik\pi/n)) \times (X - \exp(-ik\pi/n)))}_{=X^2 - 2\cos(k\pi/n)X+1}.$$

Les facteurs de degré 2 sont bien irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ puisque leurs racines sont complexes, non réelles. Finalement :

$$N(X) = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2\cos(k\pi/n)\,X + 1\right).$$

b) • *Factorisation sur* $\mathbb{C}[X]$ *:* on remarque que (on peut éventuellement chercher les racines en posant tout d'abord $Z = X^n$) :

$$P(X) = (X^n - \exp(ina))(X^n - \exp(-ina)).$$

Puis on va utiliser les racines de l'unité :

$$\begin{aligned}
(X^n - \exp(ina)) &= \exp(ina)\left(\left(\frac{X}{\exp(ia)}\right)^n - 1\right)\\
&= \exp(ina)\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{X}{\exp(ia)} - \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)\right)\\
&= \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \exp\left(i\left(a + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

De même :

$$(X^n - \exp(-ina)) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \exp\left(i\left(-a + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)\right)$$

Donc sur $\mathbb{C}[X]$:

$$P(X) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \exp\left(i\left(a + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)\right) \times \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \exp\left(i\left(-a + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)\right)$$

• *Factorisation sur* $\mathbb{R}[X]$. On réindexe le premier produit en

$$\prod_{k=1}^{n}\left(X-\exp\left(i\left(a+\frac{2k\pi}{n}\right)\right)\right).$$

On va poser $p=n-k$ dans le second produit, variable que l'on renote k par la suite.

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-\exp\left(i\left(-a+\frac{2k\pi}{n}\right)\right)\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(X-\exp\left(-i\left(a+\frac{2k\pi}{n}\right)\right)\right)$$

On peut donc regrouper les termes conjugués suivant :

$$\begin{aligned}P(X) &= \prod_{k=1}^{n}\left[\left(X-\exp\left(i\left(a+\frac{2k\pi}{n}\right)\right)\right)\times\left(X-\exp\left(-i\left(a+\frac{2k\pi}{n}\right)\right)\right)\right]\\ &= \prod_{k=1}^{n}\left(X^2-2\cos\left(a+\frac{2k\pi}{n}\right)X+1\right)\end{aligned}$$

• *Remarque :* le discriminant du terme général du produit vaut $-4\sin^2\left(a+\frac{2k\pi}{n}\right)$ qui est dans $\mathbb{R}_-^*$ puisque $\frac{a}{\pi}\notin\mathbb{Q}$. Ceci assure que l'on a bien obtenu un produit d'irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.

► CENTRALE 2 ***Triangle des racines d'un polynôme***

Soient p, q *deux complexes, on note* z_1, z_2, z_3 *les trois racines complexes du polynôme :*

$$P(X)=X^3-pX+q.$$

a) Trouver un polynôme de degré 3 admettant

$$Z_1=(z_2-z_3)^2, Z_2=(z_3-z_1)^2, Z_3=(z_1-z_2)^2$$

pour racines (on détaillera ses coefficients en fonction de p *et* q*).*

b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur p *et* q *pour que les points d'affixes* z_1, z_2, z_3 *forment un triangle équilatéral.*

Réponse

a) On écrit tout d'abord les relations entre les coefficients et racines de P :

$$\left\{\begin{aligned} z_1+z_2+z_3 &= 0\\ z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3 &= -p\\ z_1z_2z_3 &= -q\end{aligned}\right. \qquad (*)$$

Une réponse à la question est donnée par le polynôme :

$$Q(X)=(X-Z_1)(X-Z_2)(X-Z_3).$$

Il faut détailler ses coefficients, on observe en utilisant $(*)$ que :

$$\begin{aligned} Z_1 &= (z_2 - z_3)^2 \\ &= (z_2 + z_3)^2 - 4z_2z_3 \\ &= z_1^2 + 4(p + \underbrace{z_1z_2 + z_1z_3}_{=-z_1^2}) \\ &= 4p - 3z_1^2 \end{aligned}$$

On a, par permutation des indices, des formules analogues pour Z_2, Z_3. Finalement :

$$Q(X) = (X - (4p - 3z_1^2))(X - (4p - 3z_2^2))(X - (4p - 3z_2^2)).$$

On développe, et après des simplifications utilisant $(*)$ on trouve :

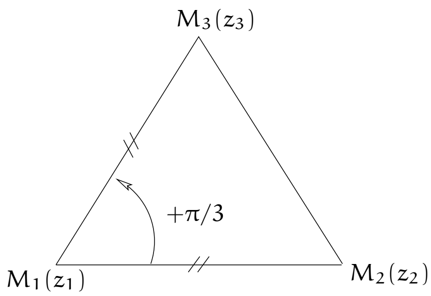
$$Q(X) = X^3 - 6pX^2 + 9p^2X + 27q^2 - 4p^3.$$

b)
• Soit M_i le point d'affixe z_i. Supposons que $(M_1M_2M_3)$ est équilatéral direct, donc $M_1M_2 = M_1M_3$ et $(\widehat{\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}})$ vaut $\pi/3[2\pi]$. Ainsi, M_3 est l'image de M_2 par la rotation de centre M_1 et d'angle $+\pi/3[2\pi]$, donc :

$$z_3 - z_1 = \exp(i\pi/3)(z_2 - z_1) \Longrightarrow Z_2 = jZ_3$$

en élevant au carré, avec $j = \exp(2i\pi/3)$. De même, M_3 est l'image de M_1 par la rotation de centre M_2 et d'angle $-\pi/3[2\pi]$ donc :

$$z_3 - z_2 = \exp(-i\pi/3)(z_1 - z_2) \Longrightarrow Z_1 = \bar{j}Z_3.$$



On en déduit :

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 = \underbrace{(1 + j + \bar{j})}_{=0} Z_3 = 0.$$

Donc la somme des racines du polynôme $Q(X)$ du a) est nulle. Par les relations coefficients/racines alors $6p$ est nul et $p = 0$. On accède au même résultat si le triangle initial est équilatéral, indirect, donc la condition $p = 0$ est nécessaire au problème.
• Réciproquement on suppose $p = 0$. Alors z_1, z_2, z_3 sont racines du polynôme

$$P(X) = X^3 + q.$$

Si $q = 0$ alors $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ donc $(M_1M_2M_3)$ équilatéral trivial. Si $q \neq 0$, soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha^3 = q$ alors $P(X) = X^3 - \alpha^3$ de racines connues : $\alpha, j\alpha$ et $\bar{j}\alpha$. Par définition on a donc :

$$\{z_1, z_2, z_3\} = \{\alpha, j\alpha, \bar{j}\alpha\}.$$

Les trois points dont les affixes décrivent l'ensemble précédent forment un triangle équilatéral, dont le centre de gravité est l'origine du plan : la condition $p = 0$ est aussi suffisante.
• Conclusion : les racines forment un triangle si et seulement si $p = 0$.

► X 3 — ***Carré formé par les racines d'un polynôme***

Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ *et*

$$P(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d.$$

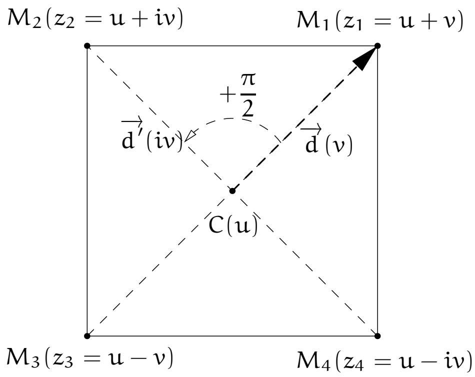
Montrer que les racines complexes de P *définissent un carré du plan complexe si et seulement si :*

$$8b = 3a^2 \text{ et } a^3 = 16c.$$

Réponse

Soient $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3), M_4(z_4)$ les points du plan complexe dont les affixes sont les z_i, racines de P. Ils définissent un carré si et seulement s'il existe un point $C(u)$ du plan, centre du carré, tels que les M_i se déduisent les uns des autres par des rotations de centre C et d'angle $\pi/2[2\pi]$. La condition à exprimer est donc que les quatre racines (z_1, z_2, z_3, z_4) vérifient

$$\exists (u, v) \in \mathbb{C}^2, \quad \begin{cases} z_1 = u + v \\ z_2 = u + iv \\ z_3 = u - v \\ z_4 = u - iv \end{cases}$$



Introduisons le polynôme : $Q(X) = P(X - u)$ qui est unitaire, de degré 4 comme P. Le polynôme $Q(X)$ admet v, iv, i^2v, i^3v pour racines donc $Q(X) = X^4 - v^4$ et donc $P(X - u) = X^4 - v^4$, donc :

$P(X) = (X+u)^4 - v^4 = X^4 - 4uX^3 + 6u^2X^2 - 4u^3X + u^4 - v^4$.

La condition cherchée équivaut donc à

$$\exists (u, v) \in \mathbb{C}^2, \quad \begin{cases} -a = 4u \\ b = 6u^2 \\ -c = 4u^3 \\ d = u^4 - v^4 \end{cases}$$

L'inconnue v n'intervient que dans la dernière équation qui s'élimine donc immédiatement, et on prend la valeur de $u = -\frac{a}{4}$ dans la première équation pour la reporter dans les deux autres. Il reste la condition $b = 6\frac{a^2}{16}$ et $c = 4\frac{a^3}{64}$. Après simplification, la condition s'écrit $8b = 3a^2$ et $a^3 = 16c$.

► CENTRALE 4 — ***Equations linéaires portant sur des polynômes***

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ *donné. Discuter des solutions dans* $\mathbb{R}[X]$ *de l'équation :*

$$(E_1) \; : P(X) + P(X-1) = Q(X),$$

puis de l'équation :

$$(E_2) \; : P(X) + P(1-X) = Q(X).$$

Réponse

• Pour l'équation (E_1), on introduit l'endomorphisme

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X)+P(X-1) \end{array} \right.$$

de $\mathbb{R}[X]$. Alors :

$$(E_1) \Longleftrightarrow u(P) = Q,$$

donc (E_1) est en fait une *équation linéaire*. Ici, on va montrer que u est bijectif, elle aura donc une unique solution.

➢ *Preuve de l'injectivité de* u. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P \in \mathrm{Ker}(u)$ donc :

$$P(X) + P(X-1) = 0 \qquad (*)$$

Si P n'est pas nul, de monôme dominant aX^n avec $a \neq 0$, alors $P(X)+P(X-1)$ a pour monôme dominant $2aX^n$, ce qui est contradictoire puisqu'il est nul. Donc P est nul, c'est-à-dire que $\mathrm{Ker}(u)$ est réduit à $\{0\}$ et u est injective.

➢ *Preuve de la surjectivité de* u. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par u, et il est de dimension finie. L'endomorphisme induit par u sur $\mathbb{R}_n[X]$ est donc un automorphisme : tout polynôme de degré n a un antécédent par u, donc u est surjective.

• Grâce à la bijectivité de u on peut conclure :

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X], \quad \exists ! P \in \mathbb{R}[X], \quad P(X) + P(X-1) = Q(X).$$

• Pour l'équation (E_2) on introduit cette fois l'endomorphisme :

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P(X) & \longmapsto & P(X)+P(1-X) \end{array} \right.$$

donc : $(E_2) \Longleftrightarrow u(P) = Q$ qui reste une équation linéaire. D'après le cours, l'ensemble $\mathscr{S}$ de ses solutions est soit vide, soit du type

$$\mathscr{S} = \{P_k + P_p, P_k \in \mathrm{Ker}(u)\} \qquad (**)$$

où P_p désigne une solution particulière de (E_2). Ici, l'injectivité et la surjectivité de u ne sont plus claires comme dans le cas précédent, on doit travailler un peu plus pour conclure...

• Nous allons chercher une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'une solution particulière P_p à (E_2).

➢ *Condition nécessaire* à l'existence de P_p tel que $P_p(X) + P_p(1-X) = Q(X)$. Si un tel polynôme existe, alors on observe que

$$Q(1-X) = P_p(1-X) + P_p(1-(1-X)) = Q(X).$$

Donc Q satisfait nécessairement $Q(X) = Q(1-X)$.

➢ *Est-ce suffisant ?* Si $Q(X) = Q(1-X)$ alors on a bien $u(P_p) = Q$ en posant :

$$P_p(X) = \frac{Q(X)}{2}.$$

• *Finalement :*

➢ si $Q(X) \neq Q(1-X)$ alors (E_2) n'a pas de solution.

➢ sinon, le polynôme $P_p(X) = \dfrac{Q(X)}{2}$ est une solution particulière. Conformément à $(*)$, on doit examiner le noyau de l'application u déjà donnée :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad (P \in \mathrm{Ker}(u)) \Longleftrightarrow (P(X) = -P(1-X)) \qquad (***).$$

En introduisant $Q(X) = P(X + 1/2)$ on trouve que $(***)$ équivaut à

$$Q(X) = -Q(-X)$$

soit au fait que $Q(X)$ soit impair. Donc $Q(X)$ admet une écriture du type :

$$Q(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k X^{2k+1},$$

où $(b_k)_k$ est une suite nulle à partir d'un certain rang. Donc

$$P(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k (X - 1/2)^{2k+1},$$

où $(b_k)_k$ est une suite nulle à partir d'un certain rang.
• En conclusion, et conformément à $(**)$:

➢ **Cas 1 :** si $Q(1 - X) \neq Q(X)$ alors (E_2) n'a pas de solution.

➢ **Cas 2 :** si $Q(X) = Q(1 - X)$, alors l'ensemble des solutions de (E_2) est exactement l'ensemble des polynômes du type :

$$\frac{Q(X)}{2} + \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k (X - 1/2)^{2k+1},$$

$(b_k)_k$ étant une suite nulle à partir d'un certain rang.

► MINES 5 ***Factorisation d'un polynôme/calcul d'un produit***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$P(X) = (X + i)^{2n+1} - (X - i)^{2n+1}.$$

Factoriser $P(X)$ sur $\mathbb{C}[X]$, en déduire la valeur du produit : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(4 + \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$.

✌ **Réponse**

• Par la formule du binôme de Newton, on remarque tout d'abord que le terme dominant de ce polynôme est $2i(2n + 1)X^{2n}$.
• Soit $z \in \mathbb{C}$. On remarque que $z = i$ n'est pas racine de P, on suppose donc $z \neq i$ alors :

$$P(z) = 0 \iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{2n+1} = 1 \iff \exists k \in [\![0\,;\,2n+1]\!],\quad \frac{z+i}{z-i} = \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right).$$

L'égalité précédente équivaut à :

$$z\left(1 - \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right)\right) = (-i)\left(1 + \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right)\right).$$

La valeur $k = 0$ est à exclure car elle mène à $0 = -2i$, on peut donc diviser :

$$z = (-i)\frac{1 + \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right)}{1 - \exp\left(\frac{2ik\pi}{2n+1}\right)} = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

par les formules d'Euler. On peut donc factoriser, en notant $x_k = \operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$:

$$P(X) = 2i(2n+1)\prod_{k=1}^{2n}(X - x_k).$$

On remarque que $x_{2n-k} = -x_k$ donc en regroupant les facteurs du produit :

$$P(X) = 2i(2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right) \qquad (*)$$

On utilise maintenant que :

$$P(2i) = (3i)^{2n+1} - i^{2n+1} = \left(3^{2n+1} - 1\right) \times i \times (-1)^n \qquad (**).$$

Par $(*)$, on trouve :

$$P(2i) = 2i(2n+1) \times (-1)^n \times \prod_{k=1}^{n}\left(4 + \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right).$$

En comparant à $(**)$:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(4 + \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right) = \frac{3^{2n+1}-1}{2(2n+1)}.$$

► TYPE X 6 — ***Polynômes de Tchebycheff***

Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) *Montrer qu'il existe un unique polynôme* $T_n \in \mathbb{R}[X]$ *tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, T_n(\cos(x)) = \cos(nx).$$

On précisera le degré de T_n. *Calculer* T_0, T_1, T_2, T_3.

b) *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$.

c) *Calculer le coefficient dominant de* T_n *puis en donner une factorisation, pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$.

d) *Calculer la somme* S_n *et le produit* P_n *des racines de* T_n *en fonction de* $n \in \mathbb{N}^*$.

Réponse

Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) • *Existence.* On écrit :

$$\cos(nx) = \text{Re}[(\exp(ix))^n] = \text{Re}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}(x) i^k \sin^k(x)\right].$$

$\text{Re}[i^k] = 0$ si k impair, et vaut $(-1)^p$ si $k = 2p$. Reste donc :

$$\cos(nx) = \sum_{0 \leqslant 2p \leqslant n}\binom{n}{2p}(-1)^p \cos^{n-2p}(x)\sin^{2p}(x).$$

Puis $\sin^{2p}(x) = (\sin^2(x))^p = (1-\cos^2(x))^p$. On a donc $T_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ en posant :

$$T_n(X) = \sum_{k=0}^{E(n/2)}\binom{n}{2p}(-1)^p X^{n-2p}(1-X^2)^p.$$

• *Unicité.* Si Q_n est un autre polynôme satisfaisant alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (T_n - Q_n)(\cos(x)) = 0$$

donc tous les $\cos(x)$ (une infinité) sont racines de $T_n - Q_n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $T_n - Q_n$ est le polynôme nul, d'où l'unicité.

• *Degré ?* Le terme dominant de chaque $X^{n-2p}(1-X^2)^p$ est $(-1)^p X^n$ donc le coefficient en X^n de $T_n(X)$ est :

$$\sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2p} \neq 0$$

donc T_n est de degré n.

• On trouve aisément $T_0(X) = 1$ et $T_1(X) = X$. Puis $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ permet d'obtenir $T_2(X) = 2X^2 - 1$. De plus :

$$\cos(3x) = \cos^3(X) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x)$$

$$= \cos^3(x) - 3\cos(x)(1-\cos^2(x)) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$$

donc $T_3(X) = 4X^3 - 3X$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $Q(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X)$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(\cos(x)) = 2\cos(x)\cos((n+1)x) - \cos(nx).$$

Par trigonométrie $\cos(x)\cos((n+1)x) = \dfrac{1}{2}(\cos((n+2)x) + \cos(nx))$, on obtient :

$$Q(\cos(x)) = \cos((n+2)x) = T_{n+2}(\cos(x)).$$

Par l'unicité liée à la définition de T_{n+2} alors

$$Q(X) = T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

c) • Nous allons expliciter le terme dominant par une récurrence sur deux rangs. On va montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(n) : \Big[\text{Le terme dominant de } T_n \text{ (resp. } T_{n+1}\text{) est } 2^{n-1}X^n \text{ (resp. } 2^n X^{n+1}\text{)} \Big].$$

En effet, $n = 0$ est un cas particulier où la formule proposée n'est pas valide.

➢ *Initialisation :* $P(1)$ vraie par le a).

➢ *Hérédité :* soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n+1)$. On sait :

$$T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

Le terme dominant du terme de droite est celui de $2XT_{n+1}(X)$, c'est $2^{n+1}X^{n+2}$, d'où $P(n+2)$.

• *Racines de* T_n *?* Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$T_n(\cos(x)) = 0 \iff \cos(nx) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad nx = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}.$$

Tous les $\cos(\pi/(2n) + k\pi/n)$, pour $k \in \mathbb{Z}$, sont donc des racines de T_n. Remarquons qu'en limitant k dans $[\![0\,;\,n-1]\!]$ on obtient :

$$0 \leqslant \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \leqslant \frac{\pi}{n} + \frac{(n-1)\pi}{n} \leqslant \pi$$