Chapitre 1
Nombres complexes

Jérôme Cardan
1501-1576

Les nombres complexes sont apparus en Italie au XVI^{e} siècle. Niccolo **Tartaglia** le premier résout des équations du troisième degré. Il révèle sa formule à Jérôme **Cardan** qui la publie en 1545 dans son ouvrage *Ars Magna*. Cependant, certaines racines réelles échappaient à cette formule. En 1560, Rafaele **Bombelli** s'aperçoit qu'on les retrouve si l'on conserve des racines de nombres négatifs qui se simplifient en fin de calcul. Cela le conduit à introduire les nombres complexes dont il donne explicitement les règles de calculs. Cependant, ces nouveaux nombres, nommés imaginaires par René **Descartes** en 1637, peinent à se faire admettre. Leonhard **Euler** les utilise abondamment et ose, en 1749, cette définition :

On nomme quantité imaginaire celle qui n'est ni plus grande que zéro, ni plus petite que zéro, ni plus égale à zéro ; ce sera quelque chose d'impossible comme $\sqrt{-1}$.

Au début du siècle suivant, Carl Friedrich **Gauss** donne une construction effective de ces nombres et précise les opérations d'addition et de multiplication. On les dénomme alors nombres complexes, c'est-à-dire composés de deux nombres, les parties réelle et imaginaire.

■■ Objectifs

■ Les incontournables

▷ Savoir manipuler les écritures algébrique et exponentielle des nombres complexes :
- pour simplifier une expression complexe ;
- pour déterminer si un nombre complexe est réel.

▷ Utiliser les nombres complexes en trigonométrie :
- pour linéariser une expression trigonométrique ;
- pour établir une formule trigonométrique.

▷ Savoir résoudre une équation polynomiale, notamment :
- déterminer les racines n-ièmes d'un nombre complexe ;
- calculer les racines carrées d'un nombre complexe, présenté sous forme algébrique ou exponentielle ;
- résoudre les équations polynomiales de degré 2.

Résumé de cours

Notation algébrique des nombres complexes

Présentation de C

Définition : *On appelle **nombre complexe** toute quantité de la forme $a+ib$, où $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et où i est un nombre complexe tel que $i^2=-1$.*
*a est la **partie réelle** de z et b est la **partie imaginaire** et on note $a=\mathfrak{Re}\,(z)$ et $b=\mathfrak{Im}\,(z)$.*

Vocabulaire : *Si la partie réelle de z est nulle, on dit que z est **imaginaire pur**.*

Théorème 1.1.— Unicité de l'écriture d'un nombre complexe en notation algébrique —. Pour tout couple $(z,z') \in \mathbf{C}^2$ de nombres complexes,

$$\boxed{z=z' \iff \begin{cases} \mathfrak{Re}\,z &= \mathfrak{Re}\,z' \\ \mathfrak{Im}\,z &= \mathfrak{Im}\,z' \end{cases}}$$

On note $\mathbf{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls.

Conjugué et module d'un nombre complexe

Définition : ***Le conjugué** du nombre complexe $z=a+ib$, où $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ est $\bar{z}=a-ib$.*

Le conjugué vérifie les différentes propriétés suivantes.

Proposition 1.2.— Soit $(z,z') \in \mathbf{C}^2$ un couple de nombres complexes. Alors :

- $\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}'$;
- $\bar{\bar{z}}=z$;
- $\mathfrak{Re}\,(z)=\frac{1}{2}(z+\bar{z})$;
- si $z' \neq 0$, $\overline{z/z'}=\bar{z}/\bar{z}'$;
- $\overline{z.z'}=\bar{z}\bar{z}'$;
- $\mathfrak{Im}\,(z)=\frac{1}{2i}(z-\bar{z})$.

Corollaire 1.3.— Caractérisation des nombres réels, imaginaires purs —. Soit $z \in \mathbf{C}$ un nombre complexe. Alors :

- z est réel $\Leftrightarrow \mathfrak{Im}\,(z)=0 \Leftrightarrow z=\bar{z}$;
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \mathfrak{Re}\,(z)=0 \Leftrightarrow z=-\bar{z}$.

Définition : ***Le module** du nombre complexe $z=a+ib$, où $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ est le réel positif ou nul défini par $|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$.*

Remarque : soit $z \in \mathbf{C}$, on a l'encadrement $\max\{|\mathfrak{Re}\,z|,|\mathfrak{Im}\,z|\} \leq |z| \leq |\mathfrak{Re}\,z|+|\mathfrak{Im}\,z|$.

Proposition 1.4.— Propriétés du module —. Pour tout couple (z,z') de nombres complexes,

- $|z.z'|=|z|\,|z'|$;
- $|z/z'|=|z|/|z'|$;
- $|z+z'| \leq |z|+|z'|$;
- $|z-z'| \geq \big||z|-|z'|\big|$.

Remarque : $|z+z'|=|z|+|z|'$ si, et seulement si, il existe un réel $\lambda>0$ tel que $z'=\lambda z$.

Plan complexe

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est le plan muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. À tout nombre complexe $z = x + iy$, où $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on associe le point M de $\mathscr{P}$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. On dit que M est l'**image du complexe** z et que z est l'**affixe du point** M. On peut associer aussi à z le vecteur $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. On dit que z est l'affixe du vecteur $\vec{u}$.

■ Nombres complexes de module 1

On note **U** l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Exponentielle imaginaire pure

Définition : *Soit $\theta \in \mathbf{R}$, on appelle* ***exponentielle imaginaire d'angle*** *θ, et on note $e^{i\theta}$ le complexe $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.*

Proposition 1.5.— Représentation des nombres complexes de module 1 —. Pour tout nombre complexe $z \in \mathbf{U}$, il existe $\theta \in \mathbf{R}$, unique à 2π-près, tel que $z = e^{i\theta}$.

Théorème 1.6.— Règles de calcul pour l'exponentielle imaginaire —. Soit $(\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2$, alors :

- $e^{i0} = 1$;
- $e^{-i\theta} = 1/e^{i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$;
- $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$;
- $e^{i(\theta-\theta')} = e^{i\theta}/e^{i\theta'}$.

Formules d'Euler et Moivre

Théorème 1.7.— Pour tout réel $\theta \in \mathbf{R}$ et tout entier relatif $n \in \mathbf{Z}$,

- **Euler :** $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$;
- **Moivre :** $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$, soit $\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Applications à la trigonométrie

Lemme 1.8.— Factorisation d'une somme d'exponentielles —. Soit $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbf{R}^2$, alors

- $e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = 2\cos\left(\dfrac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$
- $e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2} = 2i\sin\left(\dfrac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}$.

On déduit de ces propriétés, les formules de trigonométrie rappelées à la fin du résumé de cours.

■ Notation exponentielle des nombres complexes

Proposition 1.9.— Soit $z \in \mathbf{C}^*$ un nombre complexe non nul. Il **existe** un couple de réels $(\rho, \theta) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ tel que $z = \rho e^{i\theta} = \rho\big(\cos\theta + i\sin\theta\big)$.
Cette écriture est appelée **forme exponentielle ou trigonométrique** de z.

Définition : *Si $z \in \mathbf{C}^*$ s'écrit $z = \rho e^{i\theta}$, alors nécessairement $\rho = |z|$. On appelle* ***un argument*** *de z, et on note $\mathcal{A}rg(z)$ tout nombre réel tel que $z = |z|e^{i\,\mathcal{A}rg(z)}$.*

Interprétation : soit M l'image dans le plan complexe d'un complexe non nul $z = \rho e^{i\theta}$. Alors $\rho = |z|$ est la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et θ est une mesure modulo 2π de l'angle orienté $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$.

Il n'y a donc pas unicité de l'écriture exponentielle.

Théorème 1.10.— Défaut d'unicité de l'écriture en notation exponentielle —. Pour tout couple $(z, z') \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$ de nombres complexes non nuls :

$$\boxed{z = z' \iff \left\{ \begin{array}{rcl} |z| & = & |z'| \\ \mathcal{A}rg(z) & \equiv & \mathcal{A}rg(z')\,[2\pi] \end{array} \right.}$$

Notation : *dans l'énoncé ci-dessus, on a noté $\theta_1 \equiv \theta_2 [2\pi]$ la relation $\exists k \in \mathbf{Z},\ \theta_2 = \theta_1 + 2\,k\pi$.*

Proposition 1.11.— Propriétés des arguments —. Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$ et $n \in \mathbf{Z}$. Alors

- $\mathcal{A}rg(z.z') \equiv \mathcal{A}rg(z) + \mathcal{A}rg(z')\ [2\pi]$;
- $\mathcal{A}rg(z/z') \equiv \mathcal{A}rg(z) - \mathcal{A}rg(z')\ [2\pi]$;
- $\mathcal{A}rg(\bar{z}) \equiv -\mathcal{A}rg(z)\ [2\pi]$;
- $\mathcal{A}rg(z^n) \equiv n\,\mathcal{A}rg(z)\ [2\pi]$.

Fonction exponentielle complexe

Définition : *Soit $z = x + iy$ en notation algébrique. On définit l'**exponentielle de** z par :*

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\big(\cos y + i \sin y\big).$$

On appelle ***fonction exponentielle complexe*** *la fonction : $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $z \mapsto e^z$.*

Les règles de calcul pour les fonctions exponentielles réelle et imaginaire pure, s'étendent à la fonction exponentielle complexe. On a notamment $\forall (z,\ z') \in \mathbf{C}^2$, $e^z e^{z'} = e^{z+z'}$.

■ Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe

Définition : *On appelle* ***racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité*** *tout complexe z vérifiant $z^n = 1$. L'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité est noté $\mathbf{U}_n$.*

Théorème 1.12.— Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$. Notons pour $k \in \mathbf{Z}$, $z_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$. Alors

$$\boxed{\mathbf{U}_n = \{z_k;\ k \in \mathbf{Z}\} = \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\}}$$

Exemples : $\mathbf{U}_1 = \{1\}$, $\mathbf{U}_2 = \{-1, 1\}$, $\mathbf{U}_3 = \{1, j, j^2\}$, $\mathbf{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$, où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Proposition 1.13.— Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe non nul quelconque —. Pour tout nombre complexe $\omega \in \mathbf{C}^*$, il existe exactement n complexes z vérifiant $z^n = \omega$.
Si on pose $\omega = \rho e^{i\theta}$, avec $(\rho, \theta) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$, il s'agit des complexes définis par :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ z_k(\omega) = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}}$$

Proposition 1.14.— Si $z \in \mathbf{U}_n \setminus \{1\}$. Alors $1 + z + z^2 + ... + z^{n-1} = 0$.

Formulaire de trigonométrie

En utilisant les nombres complexes, on peut démontrer certaines formules de trigonométrie et retrouver les autres :

Proposition 1.15.— Formules d'addition et de duplication —.

$$\boxed{\begin{array}{lcllcl} \blacksquare\ \cos(a+b) & = & \cos a \cos b - \sin a \sin b & \blacksquare\ \cos 2a & = & \cos^2 a - \sin^2 a \\ \blacksquare\ \sin(a+b) & = & \sin a \cos b + \cos a \sin b & \blacksquare\ \sin 2a & = & 2 \sin a \cos a \\ \blacksquare\ \tan(a+b) & = & \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} & \blacksquare\ \tan 2a & = & \dfrac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \end{array}}$$

Proposition 1.16.— Produits en somme (linéarisation) —.

$$\boxed{\begin{array}{lcl} \blacksquare\ \cos a \cos b & = & \frac{1}{2}\big[\cos(a+b) + \cos(a-b)\big] \\ \blacksquare\ \sin a \sin b & = & \frac{1}{2}\big[\cos(a-b) - \cos(a+b)\big] \\ \blacksquare\ \sin a \cos b & = & \frac{1}{2}\big[\sin(a+b) + \sin(a-b)\big] \end{array}}$$

En particulier, lorsque $a = b$, nous avons $\cos^2 a = \dfrac{1}{2}\big[1 + \cos 2a\big]$, $\sin^2 a = \dfrac{1}{2}\big[1 - \cos 2a\big]$.

Proposition 1.17.— Transformations de sommes en produits

$$\boxed{\begin{array}{lcllcl} \blacksquare\ \cos p + \cos q & = & 2 \cos \dfrac{p-q}{2} \cos \dfrac{p+q}{2} & \blacksquare\ \sin p + \sin q & = & 2 \cos \dfrac{p-q}{2} \sin \dfrac{p+q}{2} \\ \blacksquare\ \cos p - \cos q & = & -2 \sin \dfrac{p-q}{2} \sin \dfrac{p+q}{2} & \blacksquare\ \sin p - \sin q & = & 2 \cos \dfrac{p+q}{2} \sin \dfrac{p-q}{2} \end{array}}$$

Proposition 1.18.— Formules utilisant la tangente de l'angle moitié —. En posant $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ quand cette quantité existe, on peut écrire :

$$\boxed{\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2},\ \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}}$$

Attention : Les deux premières formules permettent une paramètrisation du cercle unité privé de $\{-1\}$ que l'on explicitera dans le chapitre 4. Par ailleurs, ces formules seront aussi utiles pour trouver certaines primitives.

Méthodes

Étude d'une expression complexe

Méthode 1.1.— Comment montrer qu'un complexe z est réel

- On peut (s'il est non nul) montrer ou écrire que son argument est un multiple de π.
- On peut aussi montrer ou écrire qu'il est égal à son conjugué.
- On peut aussi montrer que sa partie imaginaire est nulle.

Exemples : donnons deux exemples qui développent deux cheminements différents.

- Déterminons les valeurs de $n \in \mathbf{N}$ pour lesquelles le complexe $z_n = (1+i)^n$ soit réel. Comme z_n est sous forme d'une puissance n-ième, le mieux est de passer à la forme trigonométrique de $1+i$. On écrit $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et donc comme z_n est évidemment non nul, $\mathcal{A}rg\ z_n = n\mathcal{A}rg(1+i) = n\frac{\pi}{4}$ doit être un multiple de π c'est-à-dire que n doit être un multiple de 4.
- Soit $z \in \mathbf{C} - \{-1\}$ et $Z = \dfrac{z-1}{z+1}$, on veut déterminer z de telle manière que Z soit réel. Pour cela, on écrit que Z est réel si et seulement si $Z = \bar{Z}$, relation qui s'écrit, de manière équivalente par $\dfrac{z-1}{z+1} = \dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}$ c'est-à-dire : $z\bar{z} - \bar{z} + z - 1 = z\bar{z} - z + \bar{z} - 1 \Leftrightarrow \bar{z} = z$. Et on en déduit que Z est réel si et seulement si z est réel et différent de -1.

Mise en œuvre : exercice 1.2.

Méthode 1.2.— Comment montrer ou caractériser qu'un complexe z est imaginaire pur

- On peut montrer ou écrire que son argument est de la forme $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
- On peut aussi montrer ou écrire qu'il est opposé à son conjugué.
- On peut aussi montrer que sa partie réelle est nulle.

Exemple : soit $z \in \mathbf{C} - \{-1\}$ et reprenons $Z = \dfrac{z-1}{z+1}$, on veut déterminer z de telle manière que Z soit imaginaire pur. Pour cela, on écrit que Z est imaginaire pur si et seulement si $Z = -\bar{Z}$, relation qui s'écrit $\dfrac{z-1}{z+1} = -\dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}$ c'est-à-dire, $z\bar{z} - \bar{z} + z - 1 = -z\bar{z} + z - \bar{z} + 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1$. Et on en déduit que Z est imaginaire pur si et seulement si z est élément de $\mathbf{U}$ $(z \neq -1)$.

Méthode 1.3.— Comment simplifier un complexe z écrit sous forme d'une puissance de complexes, du type Z^n, où $n \in \mathbf{N}$ et Z non nul

Une méthode est d'écrire Z sous forme trigonométrique $Z = \rho e^{i\theta}$ et dans ce cas, on écrit, de façon immédiate $\quad z = \rho^n e^{in\theta}$

Méthodes

Exemple : on peut repartir de l'exemple précédent de la **méthode 1.1** en écrivant immédiatement

$$z = (1+i)^n = (\sqrt{2})^n e^{in\pi/4}$$

Remarquons, au passage, que l'idée qui viendrait à certains d'utiliser la **formule du binôme de Newton** pour développer $(1+i)^n$, dans l'espoir de simplifier cette expression, est à sortir rapidement de leur esprit. Ici ce n'est absolument pas indiqué voire contre-indiqué. Par contre la **formule du binôme de Newton** peut aider à calculer certaines sommes. Ne résistons pas au plaisir de le faire, vous aurez ainsi une méthode gratuite en plus ! Par exemple, comme

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n e^{in\pi/4} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k,$$

en prenant séparément la partie réelle et la partie imaginaire, on a :

$$(\sqrt{2})^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \sum_{0\leq 2k\leq n} \binom{n}{2k}(-1)^k,\ (\sqrt{2})^n \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \sum_{0\leq 2k+1\leq n} \binom{n}{2k+1}(-1)^k$$

Mise en œuvre : exercice 1.5.

❑ **Méthode 1.4.— Comment simplifier dans certains cas une expression complexe z écrite sous forme d'une somme**

- Si z est une somme ou une différence de complexes conjugués, on remarque alors que
$$z = Z + \overline{Z} = 2\mathfrak{Re}\,(Z) \text{ ou } z = Z - \overline{Z} = 2i\mathfrak{Im}\,(Z).$$
- Si z est une somme de complexes de module 1, on écrit alors ($(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$),
$$z = e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{-\alpha+\beta}{2}}\right) = 2e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Exemple : si θ est fixé dans $[0, \pi]$, on considère

$$z = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$$

et on écrit successivement

$$z = 1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{-\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2e^{i\frac{\theta}{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

On remarque, en passant, que comme $\theta/2 \in [0, \pi/2]$, la forme obtenue de z est la forme trigonométrique (si z est non nul !).

❑ **Méthode 1.5.— Comment simplifier une expression complexe z écrite sous forme d'un quotient**

- On peut par exemple écrire sous forme trigonométrique le numérateur et le dénominateur de z et utiliser les règles sur le module et l'argument d'un quotient.
- On peut aussi multiplier à la fois le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur.
- On peut combiner les deux méthodes précédentes.