

Chapitre 1

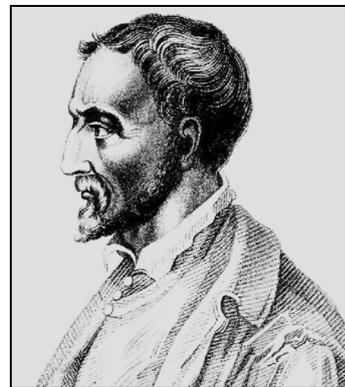
Nombres complexes

Les nombres complexes sont apparus en Italie au XVI^e siècle. Niccolò **Tartaglia** le premier résout des équations du troisième degré. Il révèle sa formule à Jérôme **Cardan** qui la publie en 1545 dans son ouvrage *Ars Magna*. Cependant, certaines racines réelles échappaient à cette formule. En 1560, Rafaele **Bombelli** s'aperçoit qu'on les retrouve si l'on conserve des racines de nombres négatifs qui se simplifient en fin de calcul. Cela le conduit à introduire les nombres complexes dont il donne explicitement les règles de calculs. Cependant, ces nouveaux nombres, nommés imaginaires par René **Descartes** en 1637, peinent à se faire admettre.

Leonhard **Euler** les utilise abondamment et ose, en 1749, cette définition :

On nomme quantité imaginaire celle qui n'est ni plus grande que zéro, ni plus petite que zéro, ni plus égale à zéro ; ce sera quelque chose d'impossible comme $\sqrt{-1}$.

Au début du siècle suivant, Carl Friedrich **Gauss** donne une construction effective de ces nombres et précise les opérations d'addition et de multiplication. On les dénomme alors nombres complexes, c'est-à-dire composés de deux nombres, les parties réelle et imaginaire.



Jérôme Cardan
1501-1576

■■ Objectifs

■ Les incontournables

- ▷ Savoir manipuler les écritures algébrique et exponentielle des nombres complexes :
 - pour simplifier une expression complexe ;
 - pour déterminer si un nombre complexe est réel.
- ▷ Utiliser les nombres complexes en trigonométrie :
 - pour linéariser une expression trigonométrique ;
 - pour établir une formule trigonométrique.
- ▷ Savoir résoudre une équation polynomiale, notamment :
 - déterminer les racines n -ièmes d'un nombre complexe ;
 - calculer les racines carrées d'un nombre complexe, présenté sous forme algébrique ou exponentielle ;
 - résoudre les équations polynomiales de degré 2.

■ Et plus si affinités...

- ▷ Résoudre des équations algébriques de degré supérieur à 2, en se ramenant à une équation plus simple.

■ ■ Résumé de cours

■ Notation algébrique des nombres complexes

Présentation de \mathbf{C}

Définition : On appelle *nombre complexe* toute quantité de la forme $a + ib$, où $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ et où i est un nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

a est la *partie réelle* de z et b est la *partie imaginaire* et on note $a = \Re(z)$ et $b = \Im(z)$.

Vocabulaire : Si la partie réelle de z est nulle, on dit que z est *imaginaire pur*.

Théorème 1.1.— Unicité de l'écriture d'un nombre complexe en notation algébrique —. Pour tout couple $(z, z') \in \mathbf{C}^2$ de nombres complexes,

$$z = z' \iff \begin{cases} \Re z = \Re z' \\ \Im z = \Im z' \end{cases}$$

On note \mathbf{C}^* l'ensemble des nombres complexes non nuls.

Conjugué et module d'un nombre complexe

Définition : Le *conjugué* du nombre complexe $z = a + ib$, où $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ est $\bar{z} = a - ib$.

Le conjugué vérifie les différentes propriétés suivantes.

Proposition 1.2.— Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$ un couple de nombres complexes. Alors :

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$;
- $\overline{\bar{z}} = z$;
- $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$;
- si $z' \neq 0$, $\overline{z/z'} = \bar{z}/\bar{z}'$;
- $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \bar{z}'$;
- $\Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.

Corollaire 1.3.— Caractérisation des nombres réels, imaginaires purs —. Soit $z \in \mathbf{C}$ un nombre complexe. Alors :

- z est réel $\iff \Im(z) = 0 \iff z = \bar{z}$;
- z est imaginaire pur $\iff \Re(z) = 0 \iff z = -\bar{z}$.

Définition : Le *module* du nombre complexe $z = a + ib$, où $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ est le réel positif ou nul défini par $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarque : soit $z \in \mathbf{C}$, on a l'encadrement $\max\{|\Re z|, |\Im z|\} \leq |z| \leq |\Re z| + |\Im z|$.

Proposition 1.4.— Propriétés du module —. Pour tout couple (z, z') de nombres complexes,

- $|z \cdot z'| = |z| |z'|$;
- $|z/z'| = |z|/|z'|$;
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$;
- $|z - z'| \geq ||z| - |z'|\}$.

Remarque : $|z + z'| = |z| + |z'|$ si, et seulement si, il existe un réel $\lambda > 0$ tel que $z' = \lambda z$.

Plan complexe

Le plan complexe \mathcal{P} est le plan muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. À tout nombre complexe $z = x + iy$, où $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on associe le point M de \mathcal{P} tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. On dit que M est l'**image du complexe** z et que z est l'**affixe du point** M . On peut associer aussi à z le vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. On dit que z est l'**affixe du vecteur** \vec{u} .

■ Nombres complexes de module 1

On note \mathbf{U} l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Exponentielle imaginaire pure

Définition : Soit $\theta \in \mathbf{R}$, on appelle **exponentielle imaginaire d'angle** θ , et on note $e^{i\theta}$ le complexe $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

Proposition 1.5.— Représentation des nombres complexes de module 1 —. Pour tout nombre complexe $z \in \mathbf{U}$, il existe $\theta \in \mathbf{R}$, unique à 2π -près, tel que $z = e^{i\theta}$.

Théorème 1.6.— Règles de calcul pour l'exponentielle imaginaire —. Soit $(\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2$, alors :

$$\begin{array}{ll} \blacksquare e^{i0} = 1 ; & \blacksquare e^{-i\theta} = 1/e^{i\theta} = \overline{e^{i\theta}} ; \\ \blacksquare e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'} ; & \blacksquare e^{i(\theta-\theta')} = e^{i\theta}/e^{i\theta'} . \end{array}$$

Formules d'Euler et Moivre

Théorème 1.7.— Pour tout réel $\theta \in \mathbf{R}$ et tout entier relatif $n \in \mathbf{Z}$,

$$\begin{array}{l} \blacksquare \text{Euler : } \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} ; \\ \blacksquare \text{Moivre : } (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \text{ soit } (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta). \end{array}$$

Applications à la trigonométrie

Lemme 1.8.— Factorisation d'une somme d'exponentielles —. Soit $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbf{R}^2$, alors

$$\blacksquare e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = 2 \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) e^{i\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}} \quad \blacksquare e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2} = 2i \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) e^{i\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}} .$$

On déduit de ces propriétés, les formules de trigonométrie rappelées à la fin du résumé de cours.

■ Notation exponentielle des nombres complexes

Proposition 1.9.— Soit $z \in \mathbf{C}^*$ un nombre complexe non nul. Il existe un couple de réels $(\rho, \theta) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ tel que $z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$. Cette écriture est appelée **forme exponentielle ou trigonométrique** de z .

Définition : Si $z \in \mathbf{C}^*$ s'écrit $z = \rho e^{i\theta}$, alors nécessairement $\rho = |z|$. On appelle **un argument** de z , et on note $\text{Arg}(z)$ tout nombre réel tel que $z = |z|e^{i \text{Arg}(z)}$.

Interprétation : soit M l'image dans le plan complexe d'un complexe non nul $z = \rho e^{i\theta}$. Alors $\rho = |z|$ est la longueur du vecteur \overrightarrow{OM} et θ est une mesure modulo 2π de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

Il n'y a donc pas unicité de l'écriture exponentielle.

Théorème 1.10.— Défaut d'unicité de l'écriture en notation exponentielle —. Pour tout couple $(z, z') \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$ de nombres complexes non nuls :

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \text{Arg}(z) \equiv \text{Arg}(z') [2\pi] \end{cases}$$

Notation : dans l'énoncé ci-dessus, on a noté $\theta_1 \equiv \theta_2 (2\pi)$ la relation $\exists k \in \mathbf{Z}, \theta_2 = \theta_1 + 2k\pi$.

Proposition 1.11.— Propriétés des arguments —. Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$ et $n \in \mathbf{Z}$. Alors

$$\begin{aligned} \blacksquare \text{Arg}(z.z') &\equiv \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z') (2\pi) ; & \blacksquare \text{Arg}(z/z') &\equiv \text{Arg}(z) - \text{Arg}(z') (2\pi) ; \\ \blacksquare \text{Arg}(\bar{z}) &\equiv -\text{Arg}(z) (2\pi) ; & \blacksquare \text{Arg}(z^n) &\equiv n \text{Arg}(z) (2\pi). \end{aligned}$$

Fonction exponentielle complexe

Définition : Soit $z = x + iy$ en notation algébrique. On définit l'**exponentielle** de z par :

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

On appelle **fonction exponentielle complexe** la fonction : $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}, z \mapsto e^z$.

Les règles de calcul pour les fonctions exponentielles réelle et imaginaire pure, s'étendent à la fonction exponentielle complexe. On a notamment $\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2, e^z e^{z'} = e^{z+z'}$.

■ Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe

Définition : On appelle **racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité** tout complexe z vérifiant $z^n = 1$. L'ensemble des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité est noté \mathbf{U}_n .

Théorème 1.12.— Soit $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$. Notons pour $k \in \mathbf{Z}, z_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$. Alors

$$\mathbf{U}_n = \{z_k; k \in \mathbf{Z}\} = \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$$

Exemples : $\mathbf{U}_1 = \{1\}, \mathbf{U}_2 = \{-1, 1\}, \mathbf{U}_3 = \{1, j, j^2\}, \mathbf{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$, où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Proposition 1.13.— Racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe non nul quelconque —. Pour tout nombre complexe $\omega \in \mathbf{C}^*$, il existe exactement n complexes z vérifiant $z^n = \omega$.

Si on pose $\omega = \rho e^{i\theta}$, avec $(\rho, \theta) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$, il s'agit des complexes définis par :

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, z_k(\omega) = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

Proposition 1.14.— Si $z \in \mathbf{U}_n \setminus \{1\}$. Alors $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = 0$.

■ Formulaire de trigonométrie

En utilisant les nombres complexes, on peut démontrer certaines formules de trigonométrie et retrouver les autres :

Proposition 1.15.— **Formules d'addition et de duplication** —.

$$\begin{array}{ll} \blacksquare \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b & \blacksquare \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \\ \blacksquare \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b & \blacksquare \sin 2a = 2 \sin a \cos a \\ \blacksquare \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} & \blacksquare \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} \end{array}$$

Proposition 1.16.— **Produits en somme (linéarisation)** —.

$$\begin{array}{l} \blacksquare \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \\ \blacksquare \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\ \blacksquare \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)] \end{array}$$

En particulier, lorsque $a = b$, nous avons $\cos^2 a = \frac{1}{2} [1 + \cos 2a]$, $\sin^2 a = \frac{1}{2} [1 - \cos 2a]$.

Proposition 1.17.— **Transformations de sommes en produits**

$$\begin{array}{ll} \blacksquare \cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} & \blacksquare \sin p + \sin q = 2 \cos \frac{p-q}{2} \sin \frac{p+q}{2} \\ \blacksquare \cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p-q}{2} \sin \frac{p+q}{2} & \blacksquare \sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \end{array}$$

Proposition 1.18.— **Formules utilisant la tangente de l'angle moitié** —. En posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ quand cette quantité existe, on peut écrire :

$$\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \tan(x) = \frac{2t}{1-t^2}$$

Attention : ces dernières formules seront utiles pour trouver certaines primitives.

■ ■ Méthodes

■ Étude d'une expression complexe

□ Méthode 1.1.— Comment montrer qu'un complexe z est réel

- ▶ On peut (s'il n'est pas nul) montrer ou écrire que son argument est un multiple de π .
- ▶ On peut aussi montrer ou écrire qu'il est égal à son conjugué.
- ▶ On peut aussi montrer que sa partie imaginaire est nulle.

Exemples : donnons deux exemples qui développent deux cheminements différents.

- Déterminons les valeurs de $n \in \mathbf{N}$ pour lesquelles le complexe $z_n = (1+i)^n$ soit réel. Comme z_n est sous forme d'une puissance n -ième, le mieux est de passer à la forme trigonométrique de $1+i$. On écrit $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et donc comme z_n est évidemment non nul, $\text{Arg } z_n = n\text{Arg}(1+i) = n\frac{\pi}{4}$ doit être un multiple de π c'est-à-dire que n doit être un multiple de 4.
- Soit $z \in \mathbf{C} - \{-1\}$ et $Z = \frac{z-1}{z+1}$, on veut déterminer z de telle manière que Z soit réel. Pour cela, on écrit que Z est réel si et seulement si $Z = \bar{Z}$, relation qui s'écrit, de manière équivalente par $\frac{z-1}{z+1} = \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}$ c'est-à-dire : $z\bar{z} - \bar{z} + z - 1 = z\bar{z} - z + \bar{z} - 1 \Leftrightarrow \bar{z} = z$. Et on en déduit que Z est réel si et seulement si z est réel et différent de -1 .

Mise en œuvre : exercice 1.1.

□ Méthode 1.2.— Comment montrer ou caractériser qu'un complexe z est imaginaire pur

- ▶ On peut montrer ou écrire que son argument est de la forme $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
- ▶ On peut aussi montrer ou écrire qu'il est opposé à son conjugué.
- ▶ On peut aussi montrer que sa partie réelle est nulle.

Exemple : soit $z \in \mathbf{C} - \{-1\}$ et reprenons $Z = \frac{z-1}{z+1}$, on veut déterminer maintenant z de telle manière que Z soit imaginaire pur. Pour cela, on écrit que Z est imaginaire pur si et seulement si $Z = -\bar{Z}$, relation qui s'écrit, de manière équivalente par $\frac{z-1}{z+1} = -\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}$ c'est-à-dire

$$z\bar{z} - \bar{z} + z - 1 = -z\bar{z} + z - \bar{z} + 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1$$

Et on en déduit que Z est imaginaire pur si et seulement si z est élément de \mathbf{U} qui doit être bien entendu différent de -1 .

□ **Méthode 1.3.— Comment simplifier un complexe z écrit sous forme d'une puissance de complexes, du type Z^n , où $n \in \mathbf{N}$ et Z non nul**

Une méthode est d'écrire Z sous forme trigonométrique $Z = \rho e^{i\theta}$ et dans ce cas, on écrit, de façon immédiate

$$z = \rho^n e^{in\theta}$$

Exemple : on peut repartir de l'exemple précédent de la **méthode 1.1** en écrivant immédiatement

$$z = (1 + i)^n = (\sqrt{2})^n e^{in\pi/4}$$

Remarquons, au passage, que l'idée qui viendrait à certains d'utiliser la **formule du binôme de Newton** pour développer $(1+i)^n$, dans l'espoir de simplifier cette expression, est à sortir rapidement de leur esprit. Ici ce n'est absolument pas indiqué voire contre-indiqué. Par contre la **formule du binôme de Newton** peut aider à calculer certaines sommes. Ne résistons pas au plaisir de le faire, vous aurez ainsi une méthode gratuite en plus! Par exemple, comme

$$(1 + i)^n = (\sqrt{2})^n e^{in\pi/4} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k,$$

en prenant séparément la partie réelle et la partie imaginaire, on a :

$$(\sqrt{2})^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} (-1)^k, \quad (\sqrt{2})^n \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (-1)^k$$

Mise en œuvre : exercice 1.4.

□ **Méthode 1.4.— Comment simplifier dans certains cas une expression complexe z écrite sous forme d'une somme**

- ▶ Si z est une somme ou une différence de complexes conjugués, on remarque alors que

$$z = Z + \bar{Z} = 2\Re(Z) \text{ ou } z = Z - \bar{Z} = 2i\Im(Z).$$

- ▶ Si z est une somme de complexes de module 1, on écrit alors $((\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2)$,

$$z = e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} + e^{i\frac{-\alpha+\beta}{2}} \right) = 2e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Exemple : si θ est fixé dans $[0, \pi]$, on considère

$$z = 1 + \cos\theta + i \sin\theta$$

et on écrit successivement

$$z = 1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{i\frac{-\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right) = 2e^{i\frac{\theta}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

On remarque, en passant, que comme $\theta/2 \in [0, \pi/2]$, la forme obtenue de z est la forme trigonométrique (si z est non nul!).