Chapitre 1

Calcul algébrique

Ce chapitre a pour but d'énoncer des rappels sur le calcul algébrique vu au lycée. Ce dernier est à la base de tous les autres chapitres et vous serez aussi amenés à l'utiliser dans d'autres matières.

1.1 Développer et factoriser

Factoriser une expression, c'est transformer une somme en produits. On peut :
— chercher un facteur commun à tous les termes ;
— utiliser des identités remarquables ;
— utiliser des méthodes de calculs pour revenir à une des formes précédentes.

1.1-1 Facteur commun

On utilise la distribution de la multiplication sur l'addition :

$$\boxed{a} \times b + \boxed{a} \times c = \boxed{a} \times (b + c)$$

Exemple

— $3x + 9y = 3 \times x + 3 \times 3y = 3(x + 3y)$
— $(x+1)(2x+1) - 2(x+1) = (x+1)((2x+1) - 2) = (x+1)(2x-1)$

1.1-2 Identités remarquables

Une identité remarquable est une expression qui a une forme particulière dont on connaît des propriétés. Il faut donc les connaître !

$$\boxed{\begin{array}{c}(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2\end{array}}$$

Exemple

— $(3x+1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$

- $(4x-5)^2 = 16x^2 - 40x + 25$
- $(3x-4)(3x+4) = 9x^2 - 16$
- $25x^2 + 10x + 1 = (5x+1)^2$
- $4x^2 - 24x + 36 = (2x-6)^2$
- $4x^2 - 25 = (2x-5)(2x+5)$

Remarque

On peut généraliser les identités remarquables à des exposants entiers quelconques. On obtient alors la formule du binôme de Newton :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Exemple

- $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- $(x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$

1.1-3 Méthodes de calcul

Si on ne peut pas appliquer les méthodes précédentes, on peut toujours essayer de développer l'expression en espérant pouvoir simplifier et factoriser par la suite.

Exemple

$(x+2)^2 - (2x+3) = x^2 + 4x + 4 - 2x - 3 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

Si on cherche à simplifier des racines carrées au dénominateur, on peut penser à utiliser la méthode de l'expression conjuguée.

Exemple

Simplifier $A = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$.

$A = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} \times \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$

1.2 Fraction

On considère 2 fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$.

— Pour additionner[1] 2 fractions, il suffit de les mettre sur le même dénominateur.
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

— Pour multiplier 2 fractions, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

— Pour diviser 2 fractions, il suffit de multiplier la première par l'inverse de la seconde.
$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

Exemple

Simplifier les expressions suivantes :

— Addition

$$\begin{aligned}\frac{9x-2}{-6x+3}+\frac{2x-3}{-9x-8} &= \frac{-9x-8}{-9x-8}\times\frac{9x-2}{-6x+3}+\frac{2x-3}{-9x-8}\times\frac{-6x+3}{-6x+3}\\ &= \frac{(-9x-8)(9x-2)+(-6x+3)(2x-3)}{(-9x-8)(-6x+3)}\\ &= \frac{-93x^2-30x+7}{(-9x-8)(-6x+3)}\end{aligned}$$

— Multiplication

$$\begin{aligned}\frac{-10x-2}{x+8}\times\frac{5x+9}{-8x-5} &= \frac{(-10x-2)(5x+9)}{(-8x-5)(x+8)}\\ &= \frac{2(5x+1)(5x+9)}{(x+8)(8x+5)}\end{aligned}$$

1. ou soustraire

— Division

$$\begin{aligned}
\frac{-\frac{10}{x-5}}{\frac{-5x-2}{-9x+4}} &= -\frac{10}{x-5}\times\frac{-9x+4}{-5x-2}\\
&= \frac{90x-40}{(-5x-2)(x-5)}\\
&= -\frac{10(9x-4)}{(x-5)(5x+2)}
\end{aligned}$$

1.3 Puissance

1.3-1 Définition

La puissance d'un nombre est une notation. Si a est un nombre entier et n un entier strictement positif, a^n est le produit de a par lui-même n fois de suite :

$$a^n = \underbrace{a\times\cdots\times a}_{n \text{ facteurs}}$$

On lit « a puissance n » ou « a exposant n ». L'entier n est appelé exposant [2].

Si $n = 0$, on pose par convention : $a^0 = 1$.
Si n est négatif, alors on pose $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ pour $a \neq 0$.
Pour un nombre $a > 0$, on peut définir aussi la notion de puissance fractionnaire.
Étant donné un réel strictement positif a, et deux entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel strictement positif y tel que $y^q = a^p$. Ce réel est noté $a^{p/q}$.

Par exemple, $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$, $a^{\frac{5}{2}} = \left(\sqrt{a}\right)^5 = \sqrt{a^5}$

1.3-2 Opération

Soit a et b deux entiers et m et n deux entiers non nuls, alors :

- — $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- — $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ si $a \neq 0$
- — $(a\times b)^n = a^n \times b^n$
- — $(a^m)^n = a^{m\times n}$
- — $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ si $b \neq 0$.

2. On verra dans la suite du cours comment faire avec des exposants réels.

1.3-3 Puissance de 10

Puissance	Préfixe
$10^0 = 1$	
$10^{-1} = 0,1$	d (déci)
$10^{-2} = 0,01$	c (centi)
$10^{-3} = 0,001$	m (milli)
$10^{-6} = 0,000001$	μ (micro)
$10^{-9} = 0,000000001$	n (nano)
$10^{-12} = 0,000000000001$	p (pico)

Puissance	Préfixe
$10^0 = 1$	
$10^1 = 10$	da (déca)
$10^2 = 100$	h (hecto)
$10^3 = 1000$	k (kilo)
$10^6 = 10000000$	M (méga)
$10^9 = 1000000000$	G (giga)
$10^{12} = 1000000000000$	T (téra)

1.4 Proportionnalité

Définition

Deux grandeurs X et Y sont proportionnelles si et seulement si il existe une constante c telle que : $X = cY$.

1.4-1 Proportionnalité et graphiques

On peut représenter une situation de proportionnalité à l'aide de graphiques dont la surface ou la hauteur est proportionnelle à la valeur d'une grandeur.

1. Dans les diagrammes en barre, les tuyaux d'orgues, la grandeur est proportionnelle à la surface du rectangle, et donc à sa hauteur ;
2. dans les histogrammes, la grandeur est proportionnelle à la surface du rectangle[3] ;
3. dans les diagrammes circulaires, la grandeur est proportionnelle à la surface des portions de cercle.

1.4-2 Proportionnalité et pourcentage

Un pourcentage représente une proportion d'une population d'effectif total 100.

Taux de variation

On considère une quantité qui varie de y_0 à y_1 avec $y_0 > 0$.

3. Et non pas à la hauteur du rectangle. Ce n'est vrai que si les classes ont la même amplitude !

$$\begin{tikzcd} y_0 \arrow[r, bend right, "t"'] & y_1 \end{tikzcd}$$

Figure 1.1 : Taux de variation de y_0 à y_1

Définition

Le taux de **variation** de y_0 à y_1 est donné par :

$$t = \frac{y_1 - y_0}{y_0}$$

Lors d'une évolution, s'il s'agit d'une augmentation, le taux sera positif ; s'il s'agit d'une diminution, le taux sera négatif.

Exemple

Une roche de calcite passe de 67 g à 60 g à l'issue d'une expérience. Quelle est son taux d'évolution ?

$t = \dfrac{60-67}{67} \simeq -0,1045$, soit une baisse de $10,45$ %.

Dans la suite, on considère une quantité qui subit n évolutions $y_0, y_1, \dots, y_n$ avec des taux d'évolutions $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$.

$$\begin{tikzcd} y_0 \arrow[r, bend right, "t_0"'] \arrow[rrr, bend left, "T"] & y_1 \arrow[r, bend right, "t_1"'] & \cdots\cdots \arrow[r, bend right, "t_{n-1}"'] & y_n \end{tikzcd}$$

Figure 1.2 : Taux de variation global

Évolutions successives

Propriété

On désire connaître le taux global T de l'évolution. On a alors la formule :

$$T = (1+t_0)(1+t_1)...(1+t_{n-1}) - 1$$

Exemple

Un concentré chimique subit une hausse de 10 % puis une baisse de 10 % , quel est le taux global de l'évolution ?

$T = (1+0,1)(1-0,1) - 1 = 0,99$, soit une baisse de 1 %.

Remarque

On ne peut pas additionner des pourcentages ! Cependant, lorsqu'ils sont petits, l'addition donne une approximation du taux cherché.

Taux moyen

On désire savoir quel est le taux moyen d'évolution, c'est-à-dire le taux t tel que n évolutions de y_0 à ce taux donnent y_n.

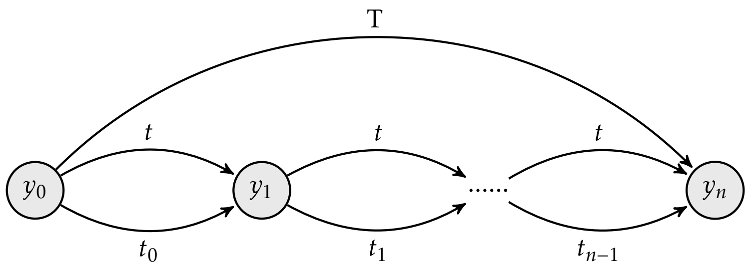

Figure 1.3 : Taux de variation moyen t

Propriété

Soit T le taux d'évolution global, alors on a les formules suivantes :

$$(1+t)^n = 1+T \text{ ou } (1+t)^n = (1+t_0)(1+t_1)...(1+t_{n-1})$$

ou

$$1+t = (1+T)^{\frac{1}{n}} \text{ ou } 1+t = ((1+t_0)(1+t_1)...(1+t_{n-1}))^{\frac{1}{n}}$$

Exemple

— Lors d'un processus qui comprend 12 étapes, on baisse la concentration d'un produit de 2 %. Quel est le taux d'évolution moyen t par étape de la concentration ?
Il s'agit donc de calculer le taux d'évolution moyen sur 12 étapes sachant que l'on connaît le taux global $T = -0,02$.
$1+t = (1+T)^{\frac{1}{12}} = 0,98^{\frac{1}{12}}$
et donc $t = 0,98^{\frac{1}{12}} - 1 \simeq -0,0017$
La concentration a baissé en moyenne d'environ 0,17 % par étape.

— La concentration d'un produit a successivement augmenté de 10 %, puis de 5 % et a baissé de 7 %. Calculer le taux d'évolution moyen t de ces trois évolutions.
Les taux de ces évolutions sont $t_1 = 0,1$, $t_2 = 0,05$ et $t_3 = -0,07$.
$1+t = [(1+t_1)(1+t_2)(1+t_3)]^{\frac{1}{3}} = [1,1 \times 1,05 \times 0,93]^{\frac{1}{3}}$
donc $t = [1,1 \times 1,05 \times 0,93]^{\frac{1}{3}} - 1 \simeq 0,0241$.
Le taux moyen de ces trois évolutions successives est d'environ 2,41 %.