Colle 1

Trigonométrie

1 Enoncés

Questions de cours

Démontrer les formules suivantes : pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que les expressions ci-dessous existent,

1. $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
2. $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$
3. $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

Questions de cours

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pi + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, on pose $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Démontrer que :

1. $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$
2. $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
3. $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

Partie I ✘

1) $\cos x - \cos(2x) = \sin(3x)$.
2) $\cos x + \cos(2x) + \sin(3x) = 0$.
3) $3\tan x = 2\cos x$.

Partie II ✏

1) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{3}$.
2) $\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x = \sqrt{3}$.
3) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$.

Exercice 2

✏

1. Exprimer $\tan(3x)$ en fonction de $\tan x$.
2. Exprimer $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$.
3. Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$.

Exercice 3

✘ Calculer la valeur de $\cos^4\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)$.

Bonus 1

✘ Démontrer les formules ci-dessous :

1. $\tan y - \tan x = \dfrac{2\sin(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}$
2. $\dfrac{\sin x}{1-\cos x} = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$
3. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \dfrac{2}{\cos 2x}$

2 Corrections

Correction des premières questions de cours :

QUESTION 1 :

a et b sont deux réels tels que $\tan a$, $\tan b$ et $\tan(a+b)$ existent et tels que $\tan a \tan b \neq 1$, soit $1-\tan a \tan b \neq 0$

$$\begin{aligned}
\tan(a+b)\,(1-\tan a\tan b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}\left(1-\frac{\sin a}{\cos a}\times\frac{\sin b}{\cos b}\right)\\
&= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}\left(1-\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}\right)\\
&= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}\times\frac{\cos a\cos b-\sin a\sin b}{\cos a\cos b}\\
&= \frac{\sin(a+b)}{\cancel{\cos(a+b)}}\times\frac{\cancel{\cos(a+b)}}{\cos a\cos b}\\
&= \frac{\sin a\cos b+\sin b\cos a}{\cos a\cos b}\\
&= \frac{\sin a\cancel{\cos b}}{\cos a\cancel{\cos b}}+\frac{\sin b\cancel{\cos a}}{\cancel{\cos a}\cos b} = \tan a+\tan b
\end{aligned}$$

On a donc $\tan(a+b)\,(1-\tan a\tan b)=\tan a+\tan b$ et comme $1-\tan a\tan b\neq 0$ alors $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$.

QUESTION 2 :

a et b sont deux réels tels que $\tan a$, $\tan b$ et $\tan(a-b)$ existent et tels que $\tan a\tan b\neq -1$, soit $1+\tan a\tan b\neq 0$

$$\begin{aligned}
\tan(a-b)\,(1+\tan a\tan b) &= \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)}\left(1+\frac{\sin a}{\cos a}\times\frac{\sin b}{\cos b}\right)\\
&= \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)}\left(1+\frac{\sin a\sin b}{\cos a\cos b}\right)\\
&= \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)}\times\frac{\cos a\cos b+\sin a\sin b}{\cos a\cos b}\\
&= \frac{\sin(a-b)}{\cancel{\cos(a-b)}}\times\frac{\cancel{\cos(a-b)}}{\cos a\cos b}=\frac{\sin a\cos b-\sin b\cos a}{\cos a\cos b}\\
&= \frac{\sin a\cancel{\cos b}}{\cos a\cancel{\cos b}}-\frac{\sin b\cancel{\cos a}}{\cancel{\cos a}\cos b} = \tan a-\tan b
\end{aligned}$$

On a donc $\tan(a-b)\,(1+\tan a\tan b)=\tan a-\tan b$ et comme $1+\tan a\tan b\neq 0$

alors $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

QUESTION 3 :

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on note $\alpha = \dfrac{a+b}{2}$ et $\beta = \dfrac{a-b}{2}$.
On a donc $\alpha + \beta = a$ et $\alpha - \beta = b$

D'après les formules d'addition, vues en première S, comme $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\beta$$

En additionnant les deux formules précédentes, on obtient

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$$

En remplaçant α par $\dfrac{a+b}{2}$ etβ par $\dfrac{a-b}{2}$, on obtient

$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Correction des secondes questions de cours :

QUESTION 1 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pi + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$, $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) \neq 0$ et donc $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ existe.
On peut donc écrire que

$$\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right) \times \cos\left(\frac{x}{2}\right) \times \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pi + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$,

$$1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

donc

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

On obtient donc $\sin x = \dfrac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ et en posant $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ on obtient

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

QUESTION 2 :

✍ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pi + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$,
$\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) \neq 0$ et donc $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ existe.
On peut donc écrire que

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

✍ Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pi + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$,

$$1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

donc

$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

On obtient donc $\cos x = \dfrac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ et en posant $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ on obtient

$$\sin x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

QUESTION 3 :

Première méthode :
Si on connaît les deux formules précédentes, on peut écrire :
✍ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pi + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{2t}{1 + t^2}}{\frac{1 - t^2}{1 + t^2}} = \frac{2t}{1 - t^2}$$

et donc

$$\tan x = \frac{2t}{1 - t^2}$$

Deuxième méthode :
On utilise les formules des questions de cours et donc

✍ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq \pi + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\tan x = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)\tan\left(\frac{x}{2}\right)}$$

☞ et en posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ on obtient

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Correction des exercices :

EXERCICE 1 (Partie I : question 1) :

☞ On travaille ici pour $x \in \mathbb{R}$.
✍ On va utiliser les formules, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

et

$$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$$

$$\begin{aligned}
\cos x - \cos(2x) = \sin(3x) &\Leftrightarrow -2\sin\left(\frac{x+2x}{2}\right)\sin\left(\frac{x-2x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\cos\left(\frac{3}{2}x\right)\\
&\Leftrightarrow -2\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\sin\left(-\frac{1}{2}x\right) = 2\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\cos\left(\frac{3}{2}x\right)\\
&\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 2\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\cos\left(\frac{3}{2}x\right) = 0\\
&\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\left(\sin\left(\frac{1}{2}x\right) - \cos\left(\frac{3}{2}x\right)\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \sin\left(\frac{3}{2}x\right) = 0 \text{ ou } \sin\left(\frac{1}{2}x\right) = \cos\left(\frac{3}{2}x\right)\\
&\Leftrightarrow \sin\left(\frac{3}{2}x\right) = \sin(0) \text{ ou } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}x\right) = \cos\left(\frac{3}{2}x\right)
\end{aligned}$$

On a donc

► $\frac{3}{2}x \equiv 0\ [\pi] \Leftrightarrow x \equiv 0\ \left[\frac{2}{3}\pi\right]$

▶ $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}x \equiv \dfrac{3}{2}x\ [2\pi] \Leftrightarrow x \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$

▶ $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}x \equiv -\dfrac{3}{2}x\ [2\pi] \Leftrightarrow x \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Conclusion :

$$s=\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{2}{3}k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\right\}$$

EXERCICE 1 (Partie I Question 2) :

☞ On travaille ici pour $x\in\mathbb{R}$

✍ On va utiliser les formules, pour tous $a,b\in\mathbb{R}$

$$\cos a+\cos b=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

et

$$\sin(2a)=2\sin a\cos a$$

$$\begin{aligned}
\cos x+\cos(2x)+\sin(3x)=0 &\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-2x}{2}\right)+2\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\cos\left(\frac{3}{2}x\right)=0\\
&\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{3}{2}x\right)\cos\left(-\frac{1}{2}x\right)+2\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\cos\left(\frac{3}{2}x\right)=0\\
&\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{3}{2}x\right)\left(\cos\left(\frac{1}{2}x\right)+\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)=0\\
&\Leftrightarrow \cos\left(\frac{3}{2}x\right)=0 \text{ ou } \cos\left(\frac{1}{2}x\right)=-\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\\
&\Leftrightarrow \cos\left(\frac{3}{2}x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ ou } \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}x\right)=\sin\left(-\frac{3}{2}x\right)
\end{aligned}$$

On a donc

▶ $\dfrac{3}{2}x \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \Leftrightarrow x \equiv \dfrac{\pi}{3}\ \left[\dfrac{2}{3}\pi\right]$

▶ $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}x \equiv -\dfrac{3}{2}x\ [2\pi] \Leftrightarrow x \equiv -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

▶ $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}x \equiv \pi+\dfrac{3}{2}x\ [2\pi] \Leftrightarrow x \equiv -\dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$

Conclusion :

$$s=\left\{\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi;-\frac{\pi}{2}+2k\pi;-\frac{\pi}{4}+k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}\right\}$$

EXERCICE 1 (Partie I Question 3) :

✍ On travaille ici pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $\tan x$ existe donc pour $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

$$\begin{aligned}3\tan x = 2\cos x &\Leftrightarrow 3\sin x = 2\cos^2 x\\ &\Leftrightarrow 3\sin x = 2(1-\sin^2 x)\\ &\Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0\end{aligned}$$

On pose $X = \sin x$ et on obtient l'équation du second degré :

$$2X^2 + 3X - 2 = 0$$

$\Delta = 3^2 - 4(2)(-2) = 25 = 5^2$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

$$X = \frac{1}{2} \text{ et } X = -2$$

Il reste à résoudre :

► $\sin x = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ce qui donne $x \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $x \equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi]$

► $\sin x = -2$. Il n'y a pas de solution puisque $\sin x \in [-1;1]$.

Conclusion :

$$s = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

EXERCICE 1 (Partie II : Question 1) :

✍ Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos x - \sin x &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right)\\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin x\right)\\ &= 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)\end{aligned}$$