Chapitre 1

Calcul algébrique dans $\mathbb{R}$

1 Ensembles et intervalles de $\mathbb{R}$

1.1 Rappels de cours

Les nombres que vous avez manipulés en seconde sont dans les ensembles :

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$$

Les différents ensembles de nombres ont été construits au fur et à mesure de l'histoire des équations, pour permettre de résoudre le maximum d'équations et répondre à des problèmes rencontrés lors de l'étude de phénomènes scientifiques. Il y a beaucoup d'autres ensembles de nombres que nous n'aborderons pas ici. L'équation $x^2 = -1$ n'admet pas de solution dans l'ensemble des réels mais il existe un ensemble encore plus grand que les réels $\mathbb{C}$, qui contient des solutions de cette équation. Cet ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, sera abordé en terminale.

Entiers naturels : $\mathbb{N} = \{\text{Ensemble des entiers positifs ou nuls}\} = \{0;1;2;3;4;...\}$

Entiers relatifs : $\mathbb{Z} = \{\text{Ensemble des entiers}\} = \{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;...\}$

Décimaux : $\mathbb{D} = \{\text{Ensemble des nombres décimaux}\} = \left\{\dfrac{a}{10^n}, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$

Les nombres décimaux sont ceux qui ont une partie décimale (après la virgule) qui n'est pas infinie. Par exemple $2,33$ est un nombre décimal alors que $\dfrac{1}{3} = 0,333\underline{3}....$ n'en est pas un.

Rationnels : $\mathbb{Q} = \{\text{Ensemble des nombres rationnels}\} = \left\{\dfrac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$

Les nombres rationnels sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme de fractions.

Réels : $\mathbb{R} = \{$Ensemble des nombres réels : rationnels et irrationnels$\}$

Les nombres **irrationnels** sont ceux que l'on ne peut pas mettre sous la forme d'une fraction.
Exemples : π, les racines carrées comme $\sqrt{3}$, $\sqrt{11}$, $3\sqrt{7}$ ...

Quelques notations

▷ Lorsqu'on enlève 0 à un ensemble on le note avec un $*$. Par exemple $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des réels sauf le nombre 0. On écrira que $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

▷ Si on veut enlever un nombre fini d'éléments d'un ensemble on utilise la notation **Ensemble**\{**les éléments à enlever**}.

Exemple : $\mathbb{R} \setminus \{-3; 2\sqrt{3}\}$ Tous les réels sauf -3 et $2\sqrt{3}$.

▷ Si on veut enlever tous les nombres supérieurs ou égaux à 2 dans $\mathbb{R}$ on écrira que l'on prend tous les nombres réels inférieurs strictement à 2. On notera cet ensemble : $]-\infty; 2[$.

▷ On notera $[a; b]$ l'intervalle qui contient tous les réels entre a et b avec a et b compris.

▷ On notera $]a; b[$ l'intervalle qui contient tous les réels entre a et b avec a et b non compris.

▷ On notera $[a; b[$ l'intervalle qui contient tous les réels entre a et b avec a compris et b non compris.

▷ On notera $]a; b]$ l'intervalle qui contient tous les réels entre a et b avec a non compris et b compris.

▷ $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres qui sont compris entre l'infini négatif et l'infini positif. Comme l'horizon, on ne peut pas atteindre les infinis dans les réels donc on écrira : $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

Intersection $\cap$

$\triangleright$ $[a;b] \cap [a';b']$ représente l'intersection entre les deux intervalles. C'est donc l'ensemble des nombres qui sont dans les deux intervalles.
Exemple : $[-1;4] \cap [0;5] = [0;4]$

Union $\cup$

$\triangleright$ $[a;b] \cup [a';b']$ représente l'union entre les deux intervalles. C'est donc l'ensemble des nombres qui sont dans l'un des intervalles ou dans les deux.
Exemple : $[-1;4] \cup [0;5] = [-1;5]$

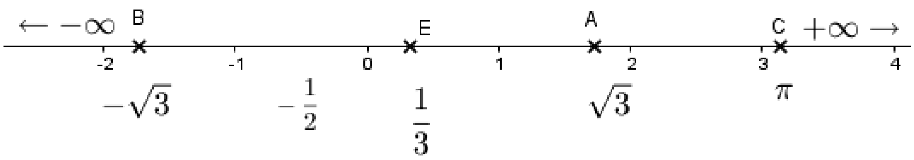
Inclusion $\subset$

$\triangleright$ On dit qu'un ensemble $A \subset B$ quand tous les éléments de A sont aussi dans B.
Exemple : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

L'ensemble vide $\emptyset$

L'ensemble vide, qui n'a aucun élément, se note $\emptyset$.
Exemple : $]-\infty;-3] \cap [4;+\infty[= \emptyset$

$\triangleright$ Tous les nombres réels peuvent être placés sur une droite que l'on nomme la droite des réels :



Propriété 1

Propriété :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Propriété 2

Stabilité pour les opérations
▷ Si $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$ alors $x + y \in \mathbb{Z}$ et $x \times y \in \mathbb{Z}$
▷ Si $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$ alors $x + y \in \mathbb{Z}$, $x - y \in \mathbb{Z}$ et $x \times y \in \mathbb{Z}$
▷ Si $x \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{Q}^*$ alors $x + y \in \mathbb{Q}$, $x - y \in \mathbb{Q}$, $x \times y \in \mathbb{Q}$ et $\dfrac{x}{y}$
▷ Si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*$ alors $x + y \in \mathbb{R}$, $x - y \in \mathbb{R}$, $x \times y \in \mathbb{R}$ et $\dfrac{x}{y}$

Propriété 3

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $x^2 \in [0; +\infty[$. Le carré d'un nombre réel est positif ou nul.

1.2 Exercices

Exercice 1

✏ Dire, en le justifiant, si les nombres ci-dessous sont dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$,$\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$.

$$A = 1 + \frac{2}{3} \qquad B = \frac{6\pi}{3} - 3\pi \qquad C = \frac{5\sqrt{3} - 7\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$D = 6,5 - \frac{7}{2} \qquad E = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad F = 3\sqrt{3} - \sqrt{27}$$

$$G = \left(\sqrt{3} - 2\right)\left(\sqrt{3} + 2\right) \qquad H = \frac{\frac{1}{2} - 3}{\frac{1}{2} + 3} \qquad I = \frac{1}{4} \times \left[\left(1 + \sqrt{5}\right)^2 - \left(1 - \sqrt{5}\right)^2\right]$$

Correction

➪ $A = 1 + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$
Le dénominateur ne peut pas se mettre sous une puissance de 10 donc A n'est pas un nombre décimal et c'est un nombre rationnel donc $\boxed{A \in \mathbb{Q}}$.

➪ $B = \frac{6\pi}{3} - 3\pi = 2\pi - 3\pi = -\pi$
π est un nombre irrationnel donc $\boxed{B \in \mathbb{R}}$.

➪ $C = \frac{5\sqrt{3} - 7\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{-2 \times \cancel{\sqrt{3}}}{1 \times \cancel{\sqrt{3}}} = \frac{-2}{1} = -2$
-2 est un entier négatif donc $\boxed{C \in \mathbb{Z}}$.

➪ $D = 6,5 - \frac{7}{2} = \frac{13}{2} - \frac{7}{2} = \frac{6}{2} = 3$
3 est un nombre entier positif donc $\boxed{D \in \mathbb{N}}$.

➪ $E = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$
0 est un nombre entier naturel donc $\boxed{E \in \mathbb{N}}$.

➪ $F = 3\sqrt{3} - \sqrt{27} = 3\sqrt{3} - \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 0$
0 est un nombre entier naturel donc $\boxed{F \in \mathbb{N}}$.

➪ $G = \left(\sqrt{3} - 2\right)\left(\sqrt{3} + 2\right) = (\sqrt{3})^2 - 2^2 = 3 - 4 = -1$
-1 est un nombre entier relatif donc $\boxed{G \in \mathbb{Z}}$.

➪ $H = \frac{\frac{1}{2} - 3}{\frac{1}{2} + 3} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{6}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{6}{2}} = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{7}{2}} = -\frac{5}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{7} - \frac{5}{7}$
Le dénominateur ne peut pas se mettre sous une puissance de 10 donc H n'est pas un nombre décimal et c'est un nombre rationnel donc $\boxed{H \in \mathbb{Q}}$.

➪ $I = \frac{1}{4} \times \left[\left(1 + \sqrt{5}\right)^2 - \left(1 - \sqrt{5}\right)^2\right] = \frac{1}{4} \times \left[(1 + 2\sqrt{5} + 5) - (1 - 2\sqrt{5} + 5)\right] =$
$\frac{1}{4} \times \left[\cancel{1} + 2\sqrt{5} + \cancel{5} - \cancel{1} + 2\sqrt{5} - \cancel{5})\right] = \frac{1}{\cancel{4}} \times \cancel{4}\sqrt{5} = \sqrt{5}$
$\sqrt{5}$ est un nombre irrationnel donc $\boxed{I \in \mathbb{R}}$.

Exercice 2

✏ Traduire les ensembles suivants à l'aide d'intervalles de $\mathbb{R}$:

$A=\mathbb{R}$	$B=\mathbb{R}^*$	$C=\mathbb{R}\setminus\{3\}$	$D=\mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$
$E=\mathbb{R}^+$	$F=\mathbb{R}^-$	$G=\mathbb{R}^{+*}$	$H=\mathbb{R}^{-*}$
$I=\mathbb{R}\setminus]-\infty;5]$	$J=\mathbb{R}\setminus]3;+\infty[$	$K=\mathbb{R}\setminus]-\infty;-2[$	$L=\mathbb{R}\setminus[-2;3[$

Correction

$A=]-\infty;+\infty[$	$G=]0;+\infty[$
$B=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$	$H=]-\infty;0[$
$C=]-\infty;3[\cup]3;+\infty[$	$I=]5;+\infty[$
$D=]-\infty;-3[\cup]-3;3[\cup]3;+\infty[$	$J=]-\infty;3]$
$E=[0;+\infty[$	$K=[2;+\infty[$
$F=]-\infty;0]$	$L=]-\infty;-2[\cup[3;+\infty[$

Exercice 3

✏ Traduire, les inégalités ci-dessous par des intervalles de $\mathbb{R}$:

1) $x>0$	2) $x\geq 0$	3) $x<0$	4) $x\leq 0$
5) $x>3$	6) $x+2\leq 0$	7) $\frac{1}{x}>0$	8) $-\frac{1}{x}>0$
9) $x^2>0$	10) $x^2>3$	11) $x^2\leq 25$	12) $x^2+1<0$

Correction

1) $x\in]0;+\infty[$	7) $\frac{1}{x}>0 \Leftrightarrow x>0 \Leftrightarrow x\in]0;+\infty[$
2) $x\in[0;+\infty[$	8) $-\frac{1}{x}>0 \Leftrightarrow x<0 \Leftrightarrow x\in]-\infty;0[$
3) $x\in]-\infty;0[$	9) $x^2>0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \Leftrightarrow x\in]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$
4) $x\in]-\infty;0]$	10) $x^2>3 \Leftrightarrow x<-\sqrt{3}$ ou $x>\sqrt{3} \Leftrightarrow x\in]-\infty;-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};+\infty[$
5) $x\in]3;+\infty[$	11) $x^2\leq 25 \Leftrightarrow x\geq -5$ et $x\leq 5 \Leftrightarrow x\in[-5;5]$
6) $x\in]-\infty;-2]$	12) Pas de solution car $x^2+1\geq 0$ donc $S=\emptyset$

Exercice 4

✏ Déterminer les ensembles ci-dessous :

1) $x \in [2;5] \cap [3;6[$	2) $x \in]-\infty;3] \cap [-7;10]$
3) $x \in]-2;0] \cap [4;5]$	4) $x \in [-5;2] \cup [0;5]$
5) $x \in [-2;1] \cap [-5;0] \cap [-1;2]$	6) $x \in]-\infty;0] \cup [0;+\infty[$

Correction

1) $x \in [3;5]$	2) $x \in [-7;3]$
3) $x \in \emptyset$	4) $x \in [-5;5]$
5) $x \in [-1;0]$	6) $x \in]-\infty;+\infty[$

Exercice 5

✘ Si p est un nombre entier naturel impair,lesquels de ces nombres sont des entiers naturels ?

$$A = \frac{3\times(p^2+1)}{2} \qquad B = 15\times\frac{p}{2}\times\frac{p+1}{5} \qquad C = \frac{(p+1)^2+(p-1)^2}{2}$$

Correction

✍ Si p est un nombre entier naturel impair, alors il existe un nombre entier naturel k tel que $p = 2k+1$.

En remplaçant p par $2k+1$, on obtient :

➪ $A = \dfrac{3\times(p^2+1)}{2} = \dfrac{3((2k+1)^2+1)}{2} = \dfrac{3(4k^2+4k+1+1)}{2} = \dfrac{3(4k^2+4k+2)}{2}$
$= \dfrac{3\times\cancel{2}(2k^2+2k+1)}{\cancel{2}} = 3(2k^2+2k+1)$

✍ $k \in \mathbb{N}$ donc par stabilité de $\mathbb{N}$ pour l'addition et la multiplication, $2k^2+2k+1$ est un entier naturel
donc $\boxed{A \in \mathbb{N}}$.

➪ $B = 15\times\dfrac{p}{2}\times\dfrac{p+1}{5} = 15\times\dfrac{2k+1}{2}\times\dfrac{2k+1+1}{5} = 3\times\cancel{5}\times\dfrac{2k+1}{2}\times\dfrac{2k+2}{\cancel{5}} =$
$3\times\dfrac{2k+1}{\cancel{2}}\times\cancel{2}(k+1) = 3\times(2k+1)(k+1)$

✍ $k \in \mathbb{N}$ donc par stabilité de $\mathbb{N}$ pour l'addition et la multiplication, $2k+1 \in \mathbb{N}$, $k+1 \in \mathbb{N}$
donc $3 \times (2k+1)(k+1) \in \mathbb{N}$ ce qui permet d'affirmer que $\boxed{B \in \mathbb{N}}$.

➪ $C = \dfrac{(p+1)^2+(p-1)^2}{2} \dfrac{p^2+2p+1+p^2-2p+1}{2} = \dfrac{2p^2+2}{2} = \dfrac{\cancel{2}(p^2+1)}{\cancel{2}} = p^2+1$
✍ $p \in \mathbb{N}$ donc par stabilité de $\mathbb{N}$ pour l'addition et la multiplication, $p^2+1 \in \mathbb{N}$
donc $\boxed{C \in \mathbb{N}}$.

2 Calculs dans $\mathbb{Z}$

2.1 Exercices

Exercice 6

✘ Si p est un nombre entier relatif impair, expliquer pourquoi les nombres ci-dessous sont des entiers relatifs :

$$A = \frac{3p-1}{2} \qquad B = \frac{3p+1}{2} \qquad C = \frac{p^2-2p+1}{4} \qquad D = \frac{9p^2-1}{4}$$

Correction

✍ p est un nombre entier relatif impair, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k+1$.

➪ $A = \dfrac{3p-1}{2} = \dfrac{3(2k+1)-1}{2} = \dfrac{6k+3-1}{2} = \dfrac{6k+2}{2} = \dfrac{\cancel{2}(3k+1)}{\cancel{2}} = 3k+1$
✍ Or $\mathbb{Z}$ est stable par somme et produit donc $3k+1 \in \mathbb{Z}$ et $A \in \mathbb{Z}$.

➪ $B = \dfrac{3p+1}{2} = \dfrac{3(2k+1)+1}{2} = \dfrac{6k+3+1}{2} == \dfrac{6k+4}{2} = \dfrac{\cancel{2}(3k+2)}{\cancel{2}} = 3k+2$
✍ Or $\mathbb{Z}$ est stable par somme et produit donc $3k+1 \in \mathbb{Z}$ et $B \in \mathbb{Z}$.

➪ $C = \dfrac{p^2-2p+1}{4} = \dfrac{(2k+1)^2-2(2k+1)+1}{4} = \dfrac{4k^2+4k+1-4k-2+1}{4}$
$= \dfrac{\cancel{4}k^2}{\cancel{4}} = k^2$
✍ Or $\mathbb{Z}$ est stable par produit donc $k^2 \in \mathbb{Z}$ et $C \in \mathbb{Z}$.