Chapitre 1

Limites de fonctions

1.1 Limites

Soit E un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles et soit x_0 un point de E ou éventuellement $\pm\infty$. On suppose que f est une fonction numérique, définie sur E, sauf peut-être en x_0.

Exemple. Pour $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $E = \mathbb{R}$ et $x_0 = 0$.

Le problème : que se passe-t-il quand x s'approche indéfiniment de x_0 ?

Autrement dit : comment étudier la limite éventuelle l de $f(x)$, quand x tend vers x_0 ? Ou encore, que veut dire

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l\,?$$

Avec la notation $a < \infty$ signifiant que a est fini, nous sommes confrontés à quatre situations :

– 1ère situation : $l < \infty$ et $x_0 < \infty$,

– 2ème situation : $l < \infty$ et $x_0 = \pm\infty$,

– 3ème situation : $l = \pm\infty$ et $x_0 < \infty$,

– 4ème situation : $l = \pm\infty$ et $x_0 = \pm\infty$.

1.1.1 Première situation : $l < \infty$ et $x_0 < \infty$

On suppose ici que la limite l est finie ainsi que x_0. Mais avant de donner les définitions, regardons d'abord l'exemple suivant :

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Le problème se pose principalement en $x_0 = 2$.

Remarquons que, quand x s'approche de 2 par valeurs supérieures, la fonction $f(x)$ s'approche de 3, mais quand x s'approche de 2 par valeurs inférieures, $f(x)$ s'approche de 1. Donc nous avons deux notions de limite, la limite à droite et la limite à gauche.

Notation : quand x tend vers x_0 par la droite, on notera $x \to x_0^+$ et quand x tend vers x_0 par la gauche, on notera $x \to x_0^-$.

Définition 1. On dira que

$$l_1 = \lim_{x \to x_0^+} f(x),$$

si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ 0 < x - x_0 < \eta \ \Rightarrow \ |f(x) - l_1| < \varepsilon.$$

Définition 2. On dira que

$$l_2 = \lim_{x \to x_0^-} f(x),$$

si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ 0 < x_0 - x < \eta \ \Rightarrow \ |f(x) - l_2| < \varepsilon.$$

Définition 3. On dira que f admet l comme limite quand x tend vers x_0 et on notera

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l,$$

si et seulement si la limite à droite l_1 et la limite à gauche l_2 coïncident avec le réel l. Donc, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ / \ 0 < |x - x_0| < \eta \ \Rightarrow \ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Exemple 1. Soit f la fonction définie par $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$, alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = ax_0 + b.$$

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ et $l = ax_0 + b$, on a

$$|f(x) - l| = |a(x - x_0)| = |a||x - x_0|$$

et pour avoir $|f(x) - l| < \varepsilon$, on doit avoir $|x - x_0| < \varepsilon/|a|$ et on peut donc prendre $\eta = \varepsilon/|a|$.

Exemple 2. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + 2x$, alors

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3.$$

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ et $l = 3$, on a

$$|f(x) - l| = |x^2 + 2x - 3| = |(x-1)(x+3)| = |x-1|\,|x+3|.$$

Pour $x \in]0, 2[$, c'est-à-dire, $|x - 1| < 1$, on a $|x + 3| < 5$, donc

$$|f(x) - l| < 5\,|x - 1|.$$

Il suffit alors de prendre $\eta = \mathrm{Min}\,\{1,\, \varepsilon/5\}$.

Théorème d'encadrement. *Soient f, g et h trois fonctions telles que*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x).$$

Si

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l,$$

alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Remarque : ce théorème est valable pour n'importe quelle limite, finie ou infinie, en un point x_0, fini ou infini.

Application pour le calcul de certaines limites : dans les deux exemples qui suivent, on utilisera l'inégalité trigonométrique

$$\forall\, \theta \in]-\pi/2, +\pi/2[, \quad |\sin\theta| \leq |\theta| \leq |\tan\theta|.$$

Exemple 3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos x$, alors

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

En effet, $\cos x - 1 = \cos x - \cos 0$, mais

$$\cos p - \cos q = -2\,\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\ \sin\left(\frac{p-q}{2}\right),$$

donc

$$\cos x - 1 = -2\,\sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Ce qui implique que

$$0 \leq |\cos x - 1| \leq 2\,\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|^2 \leq \frac{1}{2}\,|x|^2.$$

Le théorème d'encadrement nous permet de conclure que

$$\lim_{x \to 0} |\cos x - 1| = 0$$

et par conséquent

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1.$$

Exemple 4. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, alors

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1.$$

En effet, pour x voisin de 0, l'inégalité $|\sin x| \leq |x|$ implique que

$$\Big|\frac{\sin x}{x}\Big| \leq 1.$$

L'inégalité $|x| \leq |\tan x|$, implique que

$$|x| \leq \Big|\frac{\sin x}{\cos x}\Big|,$$

donc

$$|\cos x| \leq \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|.$$

Pour $x \in]-\pi/2, +\pi/2[-\{0\}$, on a x et $\sin x$ qui ont même signe et la fonction $x \mapsto \cos x$ est strictement positive, donc

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, le théorème d'encadrement permet de conclure que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

1.1.2 Deuxième situation : $l < \infty$ et $x_0 = \pm\infty$

Deux cas apparaissent dans cette situation :

Définition 1. On dira que

$$l = \lim_{x\to +\infty} f(x),$$

si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 \ / \ x > A \ \Rightarrow \ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Définition 2. On dira que

$$l = \lim_{x\to -\infty} f(x),$$

si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 \ / \ x < -A \ \Rightarrow \ |f(x) - l| < \varepsilon.$$

1.1.3 Troisième situation : $l = \pm\infty$ et $x_0 < \infty$

Quatre cas apparaissent dans cette situation :

Définition 1. On dira que

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty,$$

si et seulement si

$$\forall\, B > 0,\, \exists\, \eta > 0 \;/\; 0 < x - x_0 < \eta \;\Rightarrow\; f(x) > B.$$

Définition 2. On dira que

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty,$$

si et seulement si

$$\forall\, B > 0,\, \exists\, \eta > 0 \;/\; 0 < x_0 - x < \eta \;\Rightarrow\; f(x) > B.$$

Définition 3. On dira que

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty,$$

si et seulement si

$$\forall\, B > 0,\, \exists\, \eta > 0 \;/\; 0 < x - x_0 < \eta \;\Rightarrow\; f(x) < -B.$$

Définition 4. On dira que

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty,$$

si et seulement si

$$\forall\, B > 0,\, \exists\, \eta > 0 \;/\; 0 < x_0 - x < \eta \;\Rightarrow\; f(x) < -B.$$

1.1.4 Quatrième situation : $l = \pm\infty$ et $x_0 = \pm\infty$

Quatre cas apparaissent aussi dans cette situation :

Définition 1. On dira que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

si et seulement si

$$\forall\, B > 0,\, \exists\, A > 0 \;/\; x > A \;\Rightarrow\; f(x) > B.$$

Définition 2. On dira que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty,$$

si et seulement si

$$\forall\, B > 0,\, \exists\, A > 0 \;/\; x < -A \;\Rightarrow\; f(x) > B.$$

Définition 3. On dira que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty,$$

si et seulement si

$$\forall\, B > 0,\, \exists\, A > 0 \;/\; x > A \;\Rightarrow\; f(x) < -B.$$

Définition 4. On dira que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,$$

si et seulement si

$$\forall\, B > 0,\, \exists\, A > 0 \;/\; x < -A \;\Rightarrow\; f(x) < -B.$$

1.2 Opérations algébriques sur les limites

Pour x_0 fixé et pouvant être infini.

1– Somme : soient f et g deux fonctions telles que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad \text{et} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = l_2.$$

On a alors

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2.$$

Les limites l_1 et l_2 peuvent prendre des valeurs infinies, avec $+\infty + \infty = +\infty$ et $-\infty - \infty = -\infty$. *Exception :* $\infty - \infty$ est une forme indéterminée.

2– Produit : soient f et g deux fonctions telles que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad \text{et} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = l_2.$$

On a alors

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)\, g(x)] = l_1 \times l_2.$$

Exception : $0 \times \infty$ est aussi une forme indéterminée.

Un théorème sur les produits. *On suppose cette fois que*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

et que la fonction g est bornée. Alors

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)\, g(x)] = 0.$$

En effet, la fonction g est bornée, signifie que

$$\exists M > 0 \;/\; |g(x)| \leq M,\; \forall\, x \in D_g.$$

L'ensemble D_g étant le domaine de définition de g.

D'autre part, dire que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers x_0, revient à écrire

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0 \ / \ 0 < |x - x_0| < \eta \ \Rightarrow \ |f(x)| < \varepsilon/M$$

et comme

$$|f(x)g(x)| \leq M|f(x)|,$$

on obtient

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \eta > 0 \ / \ 0 < |x - x_0| < \eta \ \Rightarrow \ |f(x)g(x)| < \varepsilon.$$

Exemple.

$$\lim_{x \to 0} \Big(x \sin \frac{1}{x} \Big) = 0, \qquad \text{car} \qquad \Big| \sin \frac{1}{x} \Big| \leq 1.$$

3– Quotient : soient f et g deux fonctions telles que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \quad \text{et} \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = l_2.$$

On a alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}\cdot$$

Exceptions : $\dfrac{0}{0}$ et $\dfrac{\infty}{\infty}$ sont deux formes indéterminées. Il va de soi que

$$\frac{1}{0} = \infty, \quad \frac{\infty}{0} = \infty, \quad \frac{1}{\infty} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{0}{\infty} = 0.$$

4– Composition : on suppose cette fois que $y_0 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

$$\text{Si} \quad \lim_{y \to y_0} g(y) = l, \quad \text{alors,} \quad \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = l.$$

Exemple. On cherche à calculer la limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\sqrt{1+x} - 1\right)}{x}\cdot$$

On pose $f(x) = \sqrt{1+x} - 1$ et $g(y) = \dfrac{\sin y}{y(2+y)}$, on vérifie alors facilement que

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{\sin\left(\sqrt{1+x} - 1\right)}{x}\cdot$$

Remarquons que

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

et que

$$\lim_{y\to 0} g(y) = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y(2+y)} = \lim_{y\to 0} \left[\frac{\sin y}{y}\,\frac{1}{2+y}\right] = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x} = \frac{1}{2}.$$

1.3 Formes indéterminées

On a relevé (pour l'instant) quatre formes indéterminées

$$\infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad \frac{0}{0} \quad \text{et} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Théoriquement, on peut toujours se ramener à l'indétermination $0/0$, mais ce n'est pas forcément le meilleur moyen de calculer la limite en question.

Remarque : pour lever une de ces indéterminations, nous disposons de plusieurs outils :

1– Transformations élémentaires.

2– Fonctions équivalentes.

3– Règle de l'Hospital (par dérivation, sera traitée plus tard).

4– Développements limités (par dérivation, sera traitée plus tard).

1– Transformations élémentaires : selon les cas, on factorise ou on multiplie par une expression conjuguée, etc. Voici trois exemples :

Exemple 1. Pour tout entier $n \geq 1$, la limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-x^n}$$

présente l'indétermination $0/0$.

Pour lever cette indétermination, il suffit de remarquer que

$$1 - x^n = (1-x)(1 + x + \cdots + x^{n-1}).$$

Donc

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-x^n} &= \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{(1-x)(1+x+\cdots+x^{n-1})} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{1}{1+x+\cdots+x^{n-1}} = \frac{1}{n}.\end{aligned}$$