A – Développements limités

1- Définition

1-1. Présentation du développement limité

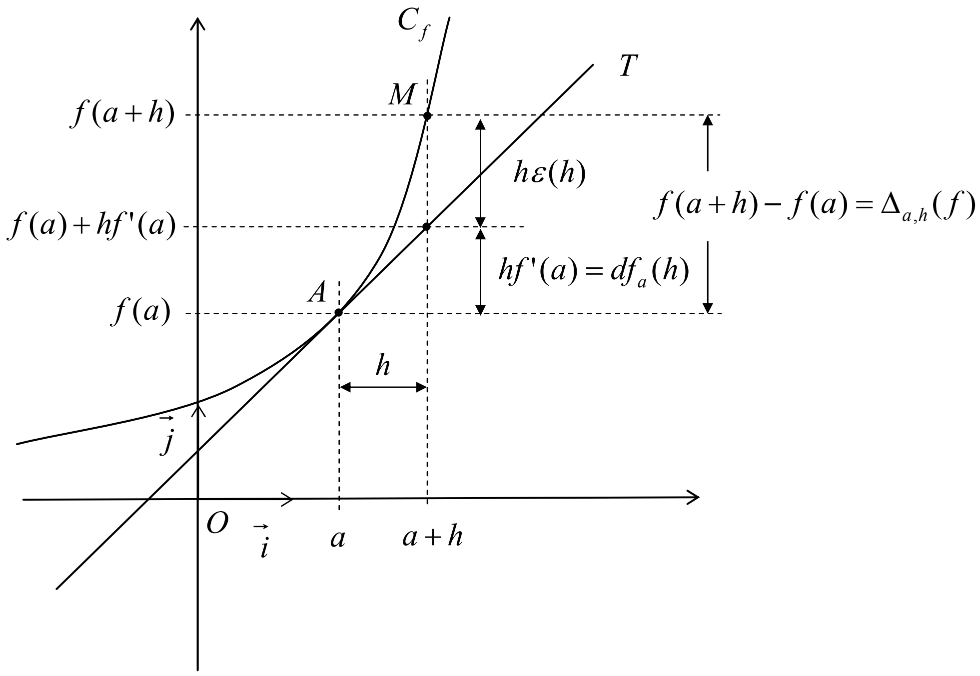
En mathématiques, un développement limité, noté DL, d'une fonction f continue au voisinage d'un point a, est une approximation polynomiale de cette fonction en ce point. La fonction f s'écrit alors sous la forme de la somme :

• d'une fonction polynôme ;

• et d'un reste qui peut être négligé lorsque la variable x est suffisamment proche de a.

Si on se contente d'un développement limité d'ordre 1, noté DL_1, on parle d'approximation linéaire.

La figure ci-dessous représente les différentes ordonnées étudiées pour les abscisses a et $a+h$:



• **Exemple**

Soit f une fonction dérivable en a, alors : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

Il est équivalent d'écrire l'égalité suivante :

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+h\varepsilon(h) \quad \text{, avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$$

Cette égalité traduit le fait que la valeur de f en $a+h$ est la somme d'un polynôme du premier degré $f(a)+hf'(a)$ et d'une fonction $h\varepsilon(h)$ qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0.

Le second membre $f(a)+hf'(a)+h\varepsilon(h)$ constitue un développement limité à l'ordre 1 de la fonction f en a.

• **Développement limité en** 0

Soit f une fonction dérivable en $a=0$, si on remplace h par x, on obtient un développement limité à l'ordre 1 de f en 0 :

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+x\varepsilon(x) \text{ , avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

• **Exemples**

$\sin x=\sin 0+x(\cos(0))+x\varepsilon(x)=x+x\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

$e^x=1+x+x\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.

Afin d'améliorer l'approximation de $f(x)$ au voisinage de 0, on utilise les dérivées successives de f en 0.

La première formulation de Taylor a été la suivante :

$$f(x)\approx f(0)+x\frac{f'(0)}{1!}+x^2\frac{f''(0)}{2!}+x^3\frac{f^{(3)}(0)}{3!}+....+x^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Cela suppose bien entendu que la fonction f est dérivable n fois de suite en 0. Il s'agit d'une égalité approximative. Les travaux de Lagrange ont abouti à l'expression du terme d'erreur (le reste) qui permet de transformer cette égalité approximative en vraie égalité. Ce terme d'erreur peut s'exprimer de différentes façons. On utilise la définition du terme d'erreur de la formule de Taylor-Lagrange.

1-2. Développement limité au voisinage d'un point et changement de variable

Déterminer le développement limité de la fonction f au voisinage d'un point x_0 peut se ramener à la détermination d'un développement limité au voisinage de 0. Il suffit d'effectuer un changement de variable.

On pose : $x=x_0+h$, d'où : $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{h\to 0}f(x_0+h)$

On détermine alors le développement limité de la fonction $g:h\mapsto f(x_0+h)$ au voisinage de 0.

• **Remarque**
En général, on utilise la lettre u pour la variable au voisinage de 0.

• **Exemple**
On cherche le développement limité d'ordre 1 de $f(x)=e^x$ au voisinage de $x_0=2$
On pose $x=2+u$, d'où : $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{u\to 0} f(2+u)$
On se ramène ainsi à la recherche du développement limité de $g(u)=f(2+u)$ au voisinage de 0.
$g(u)=e^{2+u}=e^2\cdot e^u=e^2\cdot\left[1+u+u\varepsilon(u)\right]$, avec $\lim\limits_{u\to 0}\varepsilon(u)=0$.
Finalement : $g(u)=f(2+u)=e^2+ue^2+e^2.u\varepsilon(u)$, avec $\lim\limits_{u\to 0}\varepsilon(u)=0$
$f(x)=e^2+(x-2)e^2+e^2.(x-2)\varepsilon(x-2)$ est le développement limité d'ordre 1 de f au voisinage de 2.
$g(u)=e^2+ue^2+e^2.u\varepsilon(u)$ est le développement limité d'ordre 1 de g au voisinage de 0.

On écrit donc : $f(x)=e^2+(x-2)e^2+e^2.(x-2)\varepsilon(x-2)$, avec $\lim\limits_{x\to 2}\varepsilon(x-2)=0$.

1-3. Utilité des développements limités

Les développements limités permettent de trouver plus simplement des limites de fonctions, de calculer des dérivées en un point et d'étudier la position de courbes par rapport à leurs tangentes.

• **Exemple**
Il s'agit de calculer la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ avec $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x-1}$.

Il s'agit d'une forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ »

On écrit les développements limités à l'ordre 1 des fonctions suivantes :
$\sin u=u+u\varepsilon(u)$, avec $\lim\limits_{u\to 0}\varepsilon(u)=0$
$e^u-1=u+u\sigma(u)$, avec $\lim\limits_{u\to 0}\sigma(u)=0$
On obtient : $\lim\limits_{u\to 0} f(u)=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u+u\varepsilon(u)}{u+u\sigma(u)}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u(1+\varepsilon(u))}{u(1+\sigma(u))}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1+\varepsilon(u)}{1+\sigma(u)}=1$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=1$$

2- Formule de Taylor

2-1. Définition

La formule de Taylor est appelée également formule de Taylor-Young.

2-1.1 Expression au voisinage de 0

Soit f une fonction définie sur un intervalle autour de 0 et possédant n dérivées successives en 0. Il existe une fonction ε telle que $\lim\limits_{u\to 0}\varepsilon(u)=0$ vérifiant l'égalité suivante :

$$f(u)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}u+\frac{f''(0)}{2!}u^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}u^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}u^4+.....+$$
$$+......+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}u^n+u^n.\varepsilon(u)$$

où $n!$ est la factorielle de n ; $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times.....\times 2\times 1$.

• **Définitions**

(1) On appelle partie régulière du développement la somme des termes suivants :

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}u+\frac{f''(0)}{2!}u^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}u^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}u^4+.....+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}u^n$$

(2) le terme $u^n.\varepsilon(u)$ est appelé reste de Young du développement.

(3) On appelle développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, noté $DL_n(0)$, la somme de la partie régulière et du reste de Young :

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}u+\frac{f''(0)}{2!}u^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}u^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}u^4+.....+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}u^n+u^n.\varepsilon(u)$$

2-1.2 Expression au voisinage d'un point *a*

Soit f une fonction définie sur un intervalle autour de a et possédant n dérivées successives en a. Il existe une fonction ε telle que $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$ vérifiant l'égalité suivante :

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3+....+$$
$$+......+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+(x-a)^n.\varepsilon(x)$$

2-2. Quelques développements limités usuels

En appliquant la formule de Taylor, on obtient les développements limités suivants au voisinage de 0 :

(1) $e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \ldots\ldots + \frac{u^n}{n!} + u^n.\varepsilon(u)$

(2) $\sin u = \frac{u}{1!} - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \ldots\ldots + (-1)^p \frac{u^{2p+1}}{(2p+1)!} + u^{2p+2}.\varepsilon(u)$

(3) $\cos u = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \ldots\ldots + (-1)^p \frac{u^{2p}}{(2p)!} + u^{2p+1}.\varepsilon(u)$

(4) $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} \ldots\ldots + (-1)^{n+1} \frac{u^n}{n} + u^n.\varepsilon(u)$

(5) $shu = \frac{u}{1!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \ldots\ldots + \frac{u^{2p+1}}{(2p+1)!} + u^{2p+2}.\varepsilon(u)$

(6) $chu = 1 + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} + \frac{u^6}{6!} + \ldots\ldots + \frac{u^{2p}}{(2p)!} + u^{2p+1}.\varepsilon(u)$

(7) $(1+u)^\alpha = 1 + \frac{\alpha.u}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1).u^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).u^3}{3!} + \ldots.. +$

$$+ \ldots. + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots.(\alpha-n+1).u^n}{n!} + u^n.\varepsilon(u)$$

3- Propriétés des développements limités

3-1. Enoncé des propriétés

On note DL_n le développement limité à l'ordre n . On a les propriétés suivantes :

(1) On appelle DL_n de $f(x)$ au voisinage de x_0 le DL_n de $g(u) = f(x_0+u)$ au voisinage de 0 .

(2) Le DL_n d'une fonction paire ne contient que des exposants pairs.

(3) Le DL_n d'une fonction impaire ne contient que des exposants impairs.

(4) La partie régulière du DL_n d'une somme de fonctions s'obtient en effectuant la somme des parties régulières des DL_n de ces fonctions.

(5) La partie régulière du DL_n d'un produit de fonctions s'obtient en effectuant le produit des parties régulières des DL_n de ces fonctions et en tronquant le produit au degré n .

(6) La partie régulière du DL_n d'un quotient de fonctions (le diviseur commençant par une constante) s'obtient en effectuant la division suivant les puissances croissantes des parties régulières des DL_n de ces fonctions et en tronquant le quotient dès que le reste est d'un degré supérieur à n.

(7) Si on connaît un DL_n de $f(x)$ au voisinage de 0 et si $f'(x)$ possède un DL_{n-1} alors celui-ci s'obtient en dérivant terme à terme le DL_n de $f(x)$.
(8) Si on connaît un DL_n de $f'(x)$ au voisinage de 0 alors $f(x)$ possède un DL_{n+1} qui s'obtient en intégrant les termes du DL_n de $f'(x)$ et en ajoutant la constante $f(0)$.
(9) Si $f(x)$ possède un DL_n au voisinage de 0 et si $g(x)$ possède un DL_n au voisinage de 0 alors $g(f(x))$ possède un DL_n au voisinage de 0 obtenu en composant les parties régulières et en tronquant le résultat au degré n.

3-2. Exemples d'application

3-2.1 Somme : Déterminer un DL_3 au voisinage de 0

On connaît les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + u^3.\varepsilon(u)$, avec $\lim\limits_{u \to 0} \varepsilon(u) = 0$

$\sin u = u - \frac{u^3}{6} + u^3.\sigma(u)$, avec $\lim\limits_{u \to 0} \sigma(u) = 0$

On souhaite déterminer le DL_3 au voisinage de 0 de la fonction suivante :

$$f(u) = e^u + \sin u$$

En additionnant les parties régulières, on obtient :

$$e^u + \sin u = 1 + 2u + \frac{u^2}{2} + u^3\tau(u) \quad \text{avec } \lim_{u \to 0} \tau(u) = 0.$$

$$f(u) = 1 + 2u + \frac{u^2}{2} + u^3\tau(u) \quad \text{avec } \lim_{u \to 0} \tau(u) = 0.$$

• **Remarque**

Dans ce cas, ce DL_3 ne comporte pas de terme en u^3. Le terme $u^3\tau(u)$ indique qu'il s'agit bien d'un développement limité à l'ordre 3 et non à l'ordre 2.

3-2.2 Produit : Déterminer un DL_3 au voisinage de 0

On connaît les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3.\varepsilon(u)$, avec $\lim_{u\to 0}\varepsilon(u) = 0$

$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + u^3.\sigma(u)$, avec $\lim_{u\to 0}\sigma(u) = 0$

On souhaite déterminer le DL_3 au voisinage de 0 de la fonction suivante :

$$f(u) = e^u \ln(1+u)$$

En multipliant les parties régulières entre elles, on obtient un polynôme en u :

$$P(u) = \left[1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6}\right] \times \left[u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3}\right]$$

$$P(u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^2 - \frac{u^3}{2} + \frac{u^4}{3} + \frac{u^3}{2} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{6} + \frac{u^4}{6} - \frac{u^5}{12} + \frac{u^6}{18}$$

On ne retient que les termes de degré inférieur ou égal à 3 :

$$f(u) = e^u \ln(1+u) = u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + u^3\tau(u) \quad \text{avec } \lim_{u\to 0}\tau(u) = 0$$

3-2.3 Quotient : Déterminer un DL_4 au voisinage de 0

On connaît les développements limités à l'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + u^4.\varepsilon(u)$

$\cos u = 1 - \frac{u^2}{2} + \frac{u^4}{24} + u^4.\sigma(u)$

On souhaite déterminer le DL_4 au voisinage de 0 de la fonction suivante :

$$f(u) = \frac{\ln(1+u)}{\cos u}$$

On effectue la division des polynômes suivant les puissances croissantes.

Cette division se pose et s'effectue comme une division euclidienne sauf que l'on range les polynômes suivant les puissances croissantes (le diviseur doit commencer par une constante). On effectue la division jusqu'à ce que le reste ne contienne que des termes de degrés supérieurs à 4.

$$
\begin{array}{l|l}
u-\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u^3}{3}-\dfrac{u^4}{4} & 1-\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u^4}{24} \\
-\left(u-\dfrac{u^3}{2}+\dfrac{u^5}{24}\right) & \hline \\
\hline
\quad -\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{5}{6}u^3-\dfrac{u^4}{4}-\dfrac{u^5}{24} & u-\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{5}{6}u^3-\dfrac{u^4}{2} \\
\quad -\left(-\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u^4}{4}-\dfrac{u^6}{48}\right) & \\
\hline
\qquad \dfrac{5}{6}u^3-\dfrac{u^4}{2}-\dfrac{u^5}{24}+\dfrac{u^6}{48} & \\
\qquad -\left(\dfrac{5}{6}u^3-\dfrac{5}{12}u^5+\dfrac{5}{144}u^7\right) & \\
\hline
\qquad -\dfrac{u^4}{2}+\dfrac{3}{8}u^5+\dfrac{u^6}{48}-\dfrac{5}{144}u^7 & \\
\qquad -\left(-\dfrac{u^4}{2}+\dfrac{u^6}{4}-\dfrac{u^8}{48}\right) & \\
\hline
\qquad \dfrac{3}{8}u^5+\ldots\ldots\ldots &
\end{array}
$$

Finalement : $f(u)=\dfrac{\ln(1+u)}{\cos u}=u-\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{5}{6}u^3-\dfrac{u^4}{2}+u^4\tau(u)$ avec $\lim\limits_{u\to 0}\tau(u)=0$

3-2.4 Dérivée : Déterminer un DL_2 au voisinage de 0

On donne le DL_3 suivant : $f(u)=3+5u-2u^2+u^3+u^3\varepsilon(u)$ avec $\lim\limits_{u\to 0}\varepsilon(u)=0$

On souhaite obtenir le DL_2 de la fonction dérivée $f'(u)$. En dérivant la partie régulière, on obtient :

$$f'(u)=5-4u+3u^2+u^2\sigma(u) \quad \text{avec} \quad \lim_{u\to 0}\sigma(u)=0$$