A – Fonctions logarithme et exponentielle

1- Fonction logarithme népérien

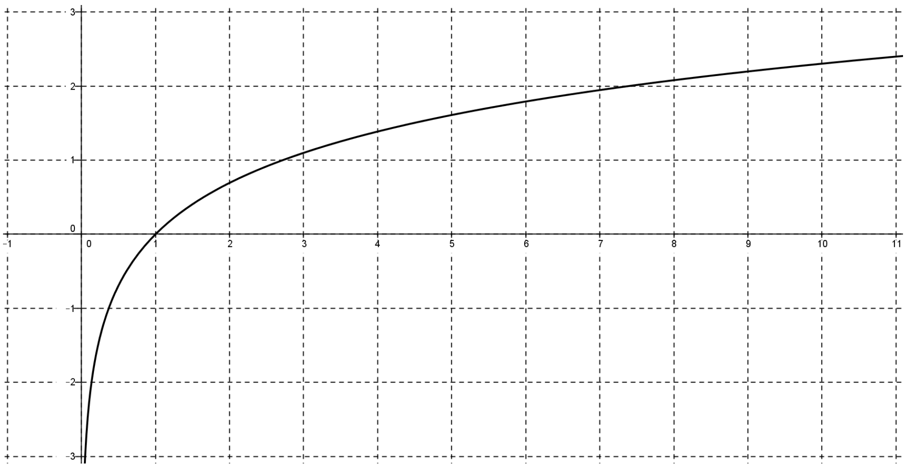
1-1. Définition

La fonction logarithme népérien est la fonction notée $\ln$. Les premières propriétés sont les suivantes :

(1) La fonction $\ln$ est définie pour des réels x strictement positifs : $x \in \left]0;+\infty\right[$;

(2) La dérivée de la fonction $\ln$ est la fonction inverse : $\left(\ln(x)\right)' = \dfrac{1}{x}$;

(3) La fonction $\ln$ s'annule en 1 : $\ln(1) = 0$.



1-2. Propriété fondamentale de la fonction logarithme

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

1-3. Autres règles de calcul

Pour tous réels a et b strictement positifs et n entier relatif :

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \;;\; \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \;;\; \ln\left(a^n\right) = n \times \ln(a) \;;\; \ln\left(\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

1-4. Sens de variation

La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $D_f = \left]0;+\infty\right[$.

Limites aux bornes de D_f : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$.

L'axe des ordonnées d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe de la fonction $\ln$.

• Tableau de variations de la fonction $\ln$:

x	0		1		$+\infty$
$(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$	$\Vert$	$+$	1	$+$	
$\ln(x)$	$\Vert -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

1-5. Équations et inéquations

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b \;;\; \ln(a) \le \ln(b) \Leftrightarrow a \le b \;;\; \ln(a) \ge \ln(b) \Leftrightarrow a \ge b$$

1-6. Le nombre e

• **Définition**

Il existe un unique nombre, noté e, tel que $\ln(e) = 1$.

Valeur approchée de e : $e \approx 2{,}718281828$.

• **Théorème**

Soit m un entier relatif : l'équation $\ln(x) = m$ a pour unique solution $x = e^m$.

On a les équivalences suivantes :

(1) $\ln(x) \ge m \Leftrightarrow x \ge e^m$

(2) $\ln(x) \le m \Leftrightarrow 0 < x \le e^m$

1-7. Limites

On rappelle les limites suivantes aux bornes de l'intervalle de définition :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$$

1-8. Croissantes comparées

On rappelle les résultats suivants :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x\ln(x) = 0$$

Pour tout entier naturel $n \geq 2$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$

1-9. Logarithme d'une fonction

• **Théorème**

Soit u une fonction définie et strictement positive sur un intervalle I. Les fonctions u et $\ln(u)$ ont même sens de variation sur I.

• **Dérivée de** $\ln(u)$

Soit u une fonction définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle I.
La fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I et sa dérivée est :

$$\left(\ln(u)\right)' = \frac{u'}{u}$$

2- Fonction exponentielle

2-1. Définition

Pour tout réel x, on appelle exponentielle de x et on note e^x l'unique réel de l'intervalle $]0;+\infty[$ dont le logarithme népérien est x.

On appelle fonction exponentielle : $\begin{cases} \mathrm{IR} \to]0;+\infty[\\ x \mapsto e^x \end{cases}$

Pour tout $x \in \mathrm{IR}$, on associe le réel y de $]0;+\infty[$ tel que :

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

2-2. Propriétés et règles de calcul

• Propriétés

(1) Pour tout $x \in \mathrm{IR}$, et pour tout réel y de $]0;+\infty[$:

$$y = e^x \Leftrightarrow \ln(y) = x \quad ; \quad e^x \le y \Leftrightarrow x \le \ln(y) \quad ; \quad e^x \ge y \Leftrightarrow x \ge \ln(y)$$

(2) Pour tout $x \in \mathrm{IR}$: $e^x > 0$.

(3) Pour tout $x \in \mathrm{IR}$: $\ln\left(e^x\right) = x$.

(4) Pour tout réel x strictement positif : $e^{\ln x} = x$.

• Règles de calcul

Pour tous réels a et b, et pour tout entier relatif n :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \quad ; \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \quad ; \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad ; \quad e^{na} = \left(e^a\right)^n$$

2-3. Sens de variation et limites

2-3.1 Dérivée et sens de variation

La fonction exponentielle est dérivable sur IR et est égale à sa dérivée :

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

• Tableau de variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$\left(e^x\right)' = e^x$	$+$
e^x	$0 \nearrow +\infty$

2-3.2 Limites

On rappelle les limites suivantes aux bornes de l'intervalle de définition :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

On rappelle les résultats suivants :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{, } \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$$

2-4. Exponentielle d'une fonction

On considère une fonction u définie et dérivable sur un intervalle I.

On considère la fonction composée notée e^u.

2-4.1 Sens de variation de e^u

Les fonctions u et e^u ont le même sens de variation sur l'intervalle I.

2-4.2 Dérivée de e^u

La fonction e^u est dérivable sur I et sa dérivée est :

$$\left(e^u\right)' = u' \times e^u$$

2-4.3 Limites de e^u

α désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. Le théorème sur la limite d'une fonction composée permet d'établir les résultats suivants :

(1) Si $\lim_{x \to \alpha} u(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to \alpha} e^{u(x)} = +\infty$

(2) Si $\lim_{x \to \alpha} u(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \to \alpha} e^{u(x)} = 0$

(3) Si $\lim_{x \to \alpha} u(x) = L$ alors $\lim_{x \to \alpha} e^{u(x)} = e^L$

2-5. Exponentielle de base a

2-5.1 Définition

Soit a un réel strictement positif et b un réel quelconque. On peut écrire l'égalité suivante :

$$e^{b\ln a} = \left(e^{\ln a}\right)^b = a^b$$

Ainsi pour $a > 0$: $a^b = e^{b\ln a}$

On définit ainsi les puissances d'un nombre réel strictement positif a.

La fonction $x \mapsto a^x$ est définie par : $a^x = e^{x\ln a}$

2-5.2 Sens de variation

(1) Si $a > 1$ alors $\ln a > 0$

La fonction $x \mapsto a^x$ est strictement croissante sur IR. On a les limites suivantes :

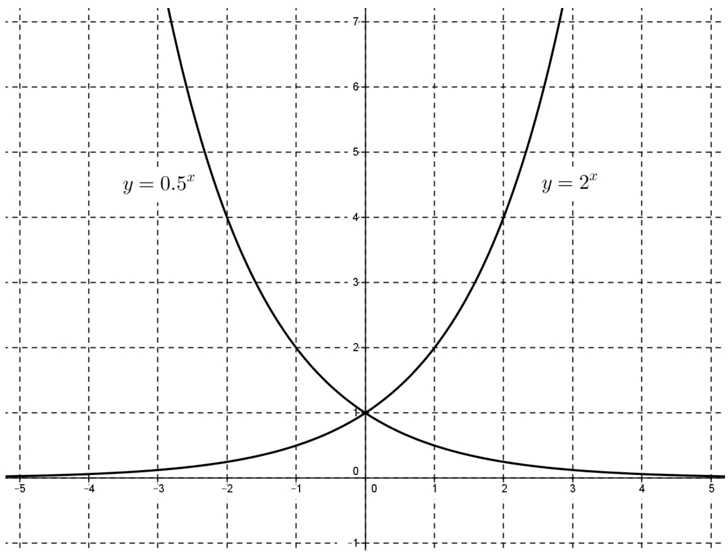
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

(2) Si $0 < a < 1$ alors $\ln a < 0$

La fonction $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante sur IR. On a les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$$

Courbes représentatives pour deux valeurs de a :

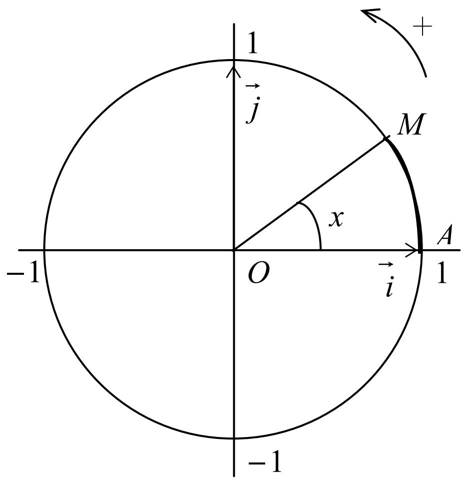


B – Trigonométrie

1- Mesures en radian d'un angle orienté

1-1. Définition

On considère le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.
Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 et de centre O orienté dans le sens trigonométrique (sens inverse de celui des aiguilles d'une montre).
Soit A le point de coordonnées $A(1;0)$ et M un point quelconque du cercle trigonométrique. Une mesure en radian de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)$ est la longueur algébrique de l'arc de cercle défini entre les points A et M :



$$x = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$$

• **Les mesures d'un angle orienté**
Un angle orienté possède une infinité de mesures. Si x est l'une d'entre elles, les autres sont de la forme $x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
En effet, le cercle trigonométrique, de rayon 1, a une circonférence égal à 2π . Par exemple, voici quelques mesures de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA})$:

➔ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA}) = 0$;

➔ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA}) = 2\pi$ (ici $k = 1$; on a parcouru le cercle dans le sens trigonométrique et on a ajouté un tour complet. Ceci positionne correctement le point A sur le cercle trigonométrique) ;

➔ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA}) = -2\pi$;

➔ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA}) = -4\pi$.

• **Exemples**
Placer les points suivants sur le cercle trigonométrique et donner plusieurs mesures de l'angle orienté $x = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$:

(1) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = \dfrac{\pi}{3}$

(2) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = -\dfrac{3\pi}{4}$

• **Solutions**

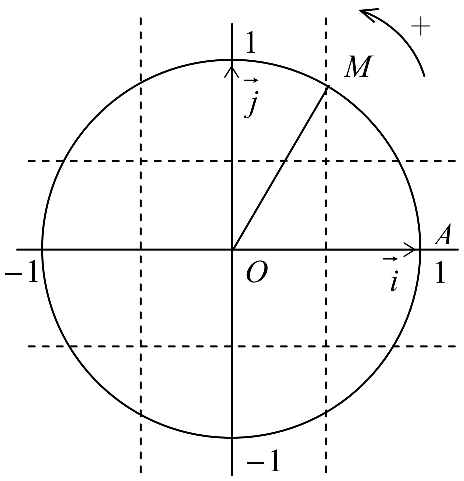
(1) $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})=\dfrac{\pi}{3}$

Autres mesures :

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})=\dfrac{\pi}{3}+2\pi=\dfrac{7\pi}{3}$

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})=\dfrac{\pi}{3}-2\pi=-\dfrac{5\pi}{3}$

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})=\dfrac{\pi}{3}+4\pi=\dfrac{13\pi}{3}$

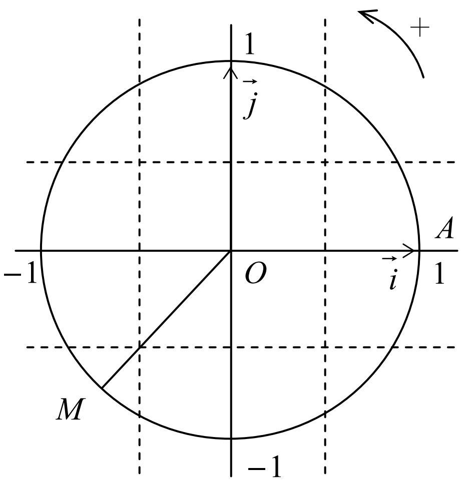


(2) $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})=-\dfrac{3\pi}{4}$

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi=\dfrac{5\pi}{4}$

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})=-\dfrac{3\pi}{4}-2\pi=-\dfrac{11\pi}{4}$

$(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM})=-\dfrac{3\pi}{4}+4\pi=\dfrac{13\pi}{4}$



1-2. Mesure principale et angle géométrique

Parmi les mesures d'un angle orienté (ou d'un arc orienté) il en existe une, et une seule, appelée mesure principale appartenant à l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

La valeur absolue de la mesure principale de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)$ correspond à l'angle géométrique formé entre les segments $[OA]$ et $[OM]$ du triangle OAM .