Partie I

Rappels de cours et méthodologie

1 Systèmes de numération

1.1 Ce qu'il faut savoir

Nous aborderons cette partie par le biais d'exemples.

1.1.1 Système de numération additif

Nous illustrons cette sous-partie par le système de numération égyptien.
Les Égyptiens utilisaient les symboles suivants :

𓏺 représente 1 unité ;
𓎆 représente 10 unités ;
𓍢 représente 100 unités ;
𓆼 représente 1000 unités ;
𓂭 représente 10 000 unités ;
𓆐 représente 100 000 unités ;
𓁨 représente 1 000 000 d'unités.

À chaque groupement de 10 symboles identiques était associé un nouveau symbole. **On dit que la base de groupement est 10**.

Voici par exemple les symboles utilisés pour l'écriture de 1 234 :

𓆼		𓍢		𓍢		𓎆		𓎆		𓎆		𓏺		𓏺		𓏺		𓏺
1000	+	100	+	100	+	10	+	10	+	10	+	1	+	1	+	1	+	1

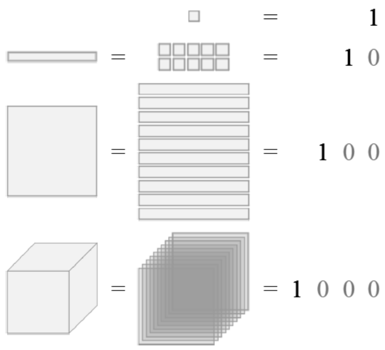
À noter

Le nombre correspond à la somme des valeurs des symboles écrits : on parle alors d'un ***système de numération additif***.
Les symboles qui permettent de désigner les quantités sont appelés des ***chiffres***.

1.1.2 Système de numération de position

- **Notre système de numération indo-arabe**

Notre écriture des nombres a pour origine le système indien modifié par les Arabes.
C'est aussi un **système en base 10** ; on fait des groupements de 10. Il comporte 10 chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.



1 234 se décompose donc comme ci-dessous :

$$1\,234 = 1 \times 1\,000 + 2 \times 100 + 3 \times 10 + 4 \times 1.$$

La position du chiffre indique la quantité représentée :

- 4 est au premier rang, il représente 4 unités ;
- 3 est au rang 2, il représente 3 groupements de 10 unités, donc 30 ;
- 2 est au rang 3, il représente 2 groupements de 100 unités, donc 200.
- 1 est au rang 4, il représente 1 groupement de 1000 unités, donc 1000.

À noter

La position du chiffre indique donc la quantité représentée : on parle alors d'un ***système de numération de position***.
L'écriture en base 10 s'appelle l'***écriture décimale***.

Système de position en base 3

Dans les exemples précédents, le changement de symbole ou de rang correspondait à des groupements par 10.

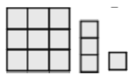
À noter

En base 3, le changement de symbole ou de rang va correspondre à des groupements par 3.

Écrivons en base 3 la quantité de carrés ci-dessous :

Commençons par faire des groupements de 3 :

Après avoir fait des groupements de 3, il reste 1 carré isolé. Cela correspond à une unité.
Les groupements de 3 sont à leur tour groupés par 3. On obtient :



Nous aboutissons ainsi à : un groupement de 3 groupements de 3, un groupement de 3 et 1 unité. En base 3, le nombre de carrés s'écrit alors :

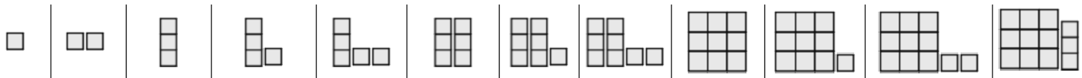
$$\overline{111}^3.$$

Attention

Le chiffre 3 en position d'exposant signifie ici "base 3". Ne pas confondre avec la notation puissance. Pour éviter la confusion, on peut aussi noter $(111)_3$.

De droite à gauche,
- le premier 1 représente 1 unité,
- le deuxième 1 représente un groupement de 3 unités,
- le troisième 1 représente un groupement de 3 groupements de 3 unités.

En base 3, les premiers nombres s'écrivent alors ainsi :



$\overline{1}^3$	$\overline{2}^3$	$\overline{10}^3$	$\overline{11}^3$	$\overline{12}^3$	$\overline{20}^3$	$\overline{21}^3$	$\overline{22}^3$	$\overline{100}^3$	$\overline{101}^3$	$\overline{102}^3$	$\overline{110}^3$

À noter

En base 3, on peut écrire tous les nombres en utilisant les chiffres 0, 1, 2.

Système de position en base 16

Pour écrire tous les nombres en base 10, nous utilisons 10 symboles et en base 3, 3 symboles. En base 16, 16 symboles sont nécessaires pour écrire tous les nombres : les 10 chiffres de 0 à 9 auxquels nous ajouterons les lettres A pour 10 unités, B pour 11 unités, C pour 12 unités, D pour 13 unités, E pour 14 unités et F pour 15 unités.
Par exemple,

$$\overline{3F5}^{16} = \underbrace{3 \times 16 \times 16}_{\text{3 groupements de 16 groupements de 16 unités}} + \underbrace{15 \times 16}_{\text{15 groupements de 16 unités}} + \underbrace{5}_{\text{5 unités}} = \underbrace{1\,013}_{\text{en base 10}}$$

Plus généralement...

En guise de synthèse - Si l'on considère un entier $p \geqslant 2$ et un nombre en base p noté $\overline{abcd}^p$ (a, b, c et d strictement inférieurs à p), on pourra utiliser sa ***décomposition canonique*** :

$$\overline{abcd}^p = a \times p^3 + b \times p^2 + c \times p^1 + d \times p^0.$$

> **Exemple de la base 60**
> 3 h 24 min 55 s $= \overline{(3)(24)(55)}^{60} = 3 \times 60^2 + 24 \times 60 + 55 = 12\,295$ secondes.

1.2 Ce qu'il faut savoir faire

1.2.1 Passer d'une base à une autre

Énoncé

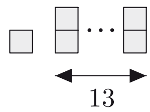
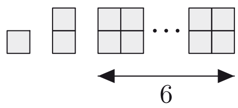
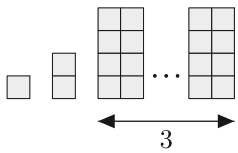
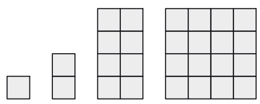
1. Comment s'écrit en base 10, le nombre qui s'écrit en base 5 sous la forme $\overline{40004}^5$?
2. Comment s'écrit en base 2 le nombre qui s'écrit 27 en base 10 ?

Solution

1. Il suffit ici d'utiliser la décomposition canonique du nombre :

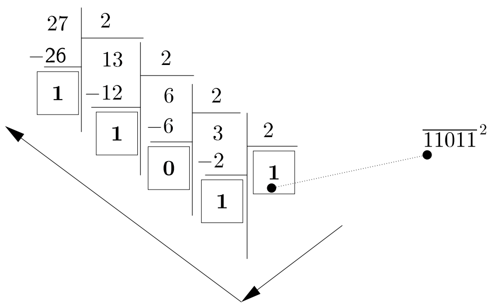
$$\overline{40004}^5 = 4 \times 5^4 + 0 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 4 \times 5^0 = 2504.$$

2. On effectue des groupements successifs par 2 en utilisant la division euclidienne :

Division	Interprétation	Illustration
$\begin{array}{r\|l} 27 & 2 \\ \cline{2-2} 07 & 13 \\ 1 & \end{array}$	27 unités donnent : 1 unité 13 groupements de 2	
$\begin{array}{r\|l} 13 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 6 \end{array}$	13 groupements de 2 donnent : 1 groupement de 2 6 groupements de 2^2	
$\begin{array}{r\|l} 6 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array}$	6 groupements de 2^2 donnent : 0 groupement de 2^2 3 groupements de 2^3	
$\begin{array}{r\|l} 3 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array}$	3 groupements de 2^3 donnent : 1 groupement de 2^3 1 groupement de 2^4	

L'algorithme s'arrête lorsque le quotient obtenu est inférieur au diviseur. On obtient :

$$27 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = \overline{11011}^2.$$



sens de lecture du nombre en base 2

Le tableau ci-dessus peut être récapitulé simplement en imbriquant, comme indiqué ci-contre, les divisions successives.
Le nombre cherché s'obtient alors en écrivant le dernier quotient obtenu puis tous les restes, dans le sens de lecture indiqué.

1 2 2 Retrouver la base d'une écriture

Énoncé

Trouver une base a ($a \neq 0$) dans laquelle on a l'égalité suivante :

$$(111)_a = (21)_a + (20)_a.$$

Solution

Écrivons la décomposition canonique de chacun des nombres :

$$(111)_a = 1 \times a^2 + 1 \times a^1 + 1 \times a^0 \quad ; \quad (21)_a = 2 \times a^1 + 1 \times a^0 \quad ; \quad (20)_a = 2 \times a^1 + 0 \times a^0.$$

L'égalité initiale est donc équivalente à :

$$a^2 + a + 1 = 2a + 1 + 2a \quad \text{soit} \quad a^2 = 3a.$$

Comme $a \neq 0$, on a :

$$a^2 = 3a \Leftrightarrow \boxed{a = 3}.$$

1 2 3 Trouver l'écriture d'un nombre

Énoncé

Trouver tous les entiers naturels à trois chiffres dont :

- la somme des chiffres des dizaines et des centaines est égale à la somme des chiffres des dizaines et des unités ;
- 9 est la somme de ces chiffres.

Solution

On commence par noter $\overline{cdu}$ le nombre à trois chiffres (le trait horizontal, sans autre précision, est utilisé implicitement pour la base 10 ; c est le chiffre des centaines, d celui des dizaines et u celui des unités). Le nombre cherché possédant trois chiffres, nous supposons $c \neq 0$.
La première condition se traduit par $c + d = d + u$. Il s'ensuit $c = u$.
La seconde condition nous donne l'égalité $c + d + u = 9$ et donc $2c + d = 9$.
Il reste à tester les différentes valeurs possibles.
Commençons par réduire le nombre de cas à étudier : la dernière égalité nous donne $2c \leqslant 9$, donc $c \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$. Dans chaque cas, d va prendre la valeur $9 - 2c$:

c	1	2	3	4
$d = 9 - 2c$	7	5	3	1
$u = c$	1	2	3	4

Les solutions sont : 171, 252, 333, 414.

2 Ensembles de nombres

2.1 Ce qu'il faut savoir

Après quelques rappels succincts sur les différents ensembles de nombres et les opérations, nous nous attardons sur les règles de calculs.

2.1.1 Des entiers aux réels

Définition 1

L'ensemble des ***entiers naturels***, noté $\mathbb{N}$, est l'ensemble formé par les entiers positifs ou nuls :

$$\mathbb{N} = \{0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\ldots\}.$$

Insuffisance de $\mathbb{N}$ Par exemple, l'équation $x+5=0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$.

Définition 2

L'ensemble des ***entiers relatifs***, noté $\mathbb{Z}$, est l'ensemble formé par les entiers positifs et les entiers négatifs :

$$\mathbb{Z} = \{\ldots\,;\,-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,\ldots\}.$$

Insuffisance de $\mathbb{Z}$ Cette fois, l'équation $x+5=0$ a une solution dans $\mathbb{Z}$ qui est -5.
Cependant, l'équation $x \times 5 = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

Définition 3

Un ***nombre rationnel*** est un nombre dont une écriture est $\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers relatifs ($q \neq 0$). Le nombre $\frac{p}{q}$ est appelé une ***fraction***.
p est le ***numérateur*** de la fraction et q son ***dénominateur***.
L'ensemble des ***nombres rationnels*** est noté $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}\,;\quad p \in \mathbb{Z},\, q \in \mathbb{Z},\, q \neq 0\right\}.$$

Remarques
- L'équation $x \times 5 = 1$ possède une solution dans $\mathbb{Q}$ qui est $\frac{1}{5}$.
- Comme tout entier relatif a peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{1}$, $\mathbb{Z}$ est **inclus** dans $\mathbb{Q}$

Parmi les nombres rationnels, on peut distinguer les nombres décimaux :

Définition 4

Une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10 est appelée ***fraction décimale***.

Définition 5

Un ***nombre décimal*** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale. L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Exemple $1,234 = \frac{1234}{1000} = \frac{1234}{10^3}$, donc $1,234$ est un nombre décimal.

Insuffisance de $\mathbb{Q}$ L'équation $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$. On ne peut donc pas donner de mesure exacte de la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 à l'aide des rationnels.

Pour obtenir une solution à l'équation $x^2 = 2$, il faut "agrandir" l'ensemble $\mathbb{Q}$.
Le nombre $\sqrt{2}$ est une solution de cette équation et on peut prouver qu'il **ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction** ; on dit que c'est un ***nombre irrationnel***.
Le nombre π est également un nombre irrationnel (d'une autre "nature" que $\sqrt{2}$, mais c'est une autre histoire...).
Pour terminer, on définit l'ensemble qui **contient tous les ensembles précédents** :

Définition 6

La réunion de l'ensemble des nombres rationnels et de l'ensemble des nombres irrationnels est l'ensemble des ***nombres réels*** ; on le note $\mathbb{R}$.

Chacun des ensembles précédents est muni de deux ***lois de composition interne*** :

- une addition $+$
- une multiplication $\times$

À noter

Par exemple, on dit que l'addition est une loi de composition **interne** sur $\mathbb{N}$ car le résultat de l'addition de deux entiers naturels est encore un entier naturel.

Quelques propriétés très importantes (a, b, c sont des réels quelconques) :

$+$

Un élément neutre : 0

$$a + 0 = 0 + a = a.$$

L'addition est commutative :

$$a + b = b + a.$$

L'addition est associative :

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

$\times$

Un élément neutre : 1

$$a \times 1 = 1 \times a = a.$$

La multiplication est commutative :

$$a \times b = b \times a.$$

La multiplication est associative :

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c).$$

La multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$