Chapitre 1

Dynamique des solides

1.1 Rappels de cours

1.1.1 Formules de changement de référentiel. Cinématique

Soit un réseau d'observateurs immobiles les uns par rapport aux autres. On suppose que chacun de ces observateurs est muni d'une règle rigide, de longueur invariable, et d'une horloge débitant un temps uniforme. Les règles ont même longueur (par ex.1 mètre) et les horloges sont synchronisées entre elles. Par définition, un tel réseau constitue un **référentiel**. Afin de concrétiser un référentiel, on lui associe un repère formé de trois axes, en général orthogonaux (mais pas forcément), d'origine commune O, soit Ox, Oy et Oz. Chacun de ces axes est orienté par un vecteur unitaire $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$. La **base** (supposée directe) formée par ce trièdre de vecteurs auquel on associe l'origine O constitue le **repère** $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. L'origine O étant arbitraire, ainsi que les orientations des vecteurs de base, il existe une infinité de repères distincts que l'on peut associer à un référentiel donné. On choisit en général celui qui est le mieux adapté au système physique que l'on étudie. En mécanique newtonienne (mécanique classique), Le référentiel fondamental est le **référentiel de Copernic** dont un repère privilégié, d'origine confondue avec le barycentre du système solaire, est constitué de trois axes orthogonaux, chacun d'eux pointant vers une étoile dite fixe [1].

---

1. Le barycentre du système solaire décrit en réalité une orbite quasi-circulaire autour du centre de la Galaxie avec une vitesse de l'ordre de 250 km/s. Les étoiles se déplacent dans la Galaxie avec des vitesses similaires. En toute rigueur, le concept de fixité est vide en physique !

Considérons un tétraèdre formé du Soleil et de trois étoiles voisines (repère concrétisant le référentiel de Copernic). Les étoiles (dont le Soleil fait partie) sont séparées en moyenne d'une distance de l'ordre de quelques années lumière (on rappelle que l'année lumière est la

Le référentiel de Copernic est un référentiel étalon, mais son utilisation n'est pas très commode quand on désire mesurer les positions, vitesses et accélérations des particules composant un corps donné. Comme tout étalon, on en réalise des copies d'usage plus naturel (élimination des mouvements d'ensemble dans le cas d'un système de particules). On introduit ainsi une classe particulière de référentiels, tous équivalents entre eux, appelés **référentiels d'inertie** ou **référentiels galiléens**, en translation rectiligne et uniforme par rapport au référentiel de Copernic.

Soit deux référentiels $\mathcal{R}_g$ et $\mathcal{R}$. Le référentiel $\mathcal{R}_g$ sera appelé **référentiel absolu** (on peut le supposer galiléen d'où l'indice g) et le référentiel $\mathcal{R}$ **référentiel relatif** (en mouvement quelconque). On considère un point fixe O_g pris comme origine dans le référentiel $\mathcal{R}_g$. On prend de même dans $\mathcal{R}$ un point fixe O ainsi qu'un trièdre cartésien $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$. Rapporté au repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un point M quelconque a pour coordonnées x, y, z. Chacun des deux référentiels est muni d'une horloge pour mesurer le temps. Les deux horloges sont supposées synchronisées.

Soit $\overrightarrow{v}_a \equiv \overrightarrow{v}(M/\mathcal{R}_g)$ la vitesse de M mesurée dans $\mathcal{R}_g$ (**vitesse absolue**), $\overrightarrow{v}_r \equiv \overrightarrow{v}(M/\mathcal{R})$ la vitesse de M mesurée dans $\mathcal{R}$ (**vitesse relative**) et $\overrightarrow{v}_e$ la **vitesse d'entraînement** (vitesse d'un point P fixe dans $\mathcal{R}$ et coïncidant avec M à l'instant t).

Relations pour les vitesses

$$\overrightarrow{v}_a = \overrightarrow{v}_r + \overrightarrow{v}_e$$

et

$$\overrightarrow{v}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{O_gO}}{dt}\right|_{\mathcal{R}_g} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Le vecteur axial $\overrightarrow{\Omega}$ représente le **vecteur rotation** du référentiel $\mathcal{R}$ par rapport à $\mathcal{R}_g$, soit $\overrightarrow{\Omega} \equiv \overrightarrow{\Omega}\ (\mathcal{R}/\mathcal{R}_g)$ (ce vecteur dépend en général du temps). Pour la vitesse relative, on a

$$\overrightarrow{v}_r = \dot{x}\overrightarrow{i} + \dot{y}\overrightarrow{j} + \dot{z}\overrightarrow{k}$$

---

distance parcourue par la lumière en une année, soit environ 10^{16} m). Elles sont d'autre part affectées de mouvements propres (mouvements relatifs des unes par rapport aux autres) ~ 10 km/s. Les étoiles formant les sommets du tétraèdre se déplacent donc de $310^7 \times 10^4 = 3\ 10^{11}$ m par an, soit un rapport angulaire (parallaxe) de l'ordre de 10^{-5} radian/an ou 2 secondes d'arc/an (l'étoile de Barnard a, quant à elle, un mouvement propre de 10 secondes d'arc/an). Le tétraèdre de référence va donc se déformer peu à peu au cours du temps. À noter que le **satellite Hypparcos** lancé par l'Agence Spatiale Européenne, et qui a fonctionné de 1989 à 1993, avait une précision d'une milliseconde d'arc ! Son successeur, le **satellite Gaia**, lancé fin 2013, aura une précision de quelques dizaines de microsecondes d'arc.

(ici et dans la suite on désignera toujours par une lettre surmontée d'un point la dérivée par rapport au temps, soit $\frac{d}{dt} \equiv \dot{}$).

Soit $\vec{a}_a \equiv \vec{a}(M/\mathcal{R}_g)$ l'accélération de M mesurée dans $\mathcal{R}_g$ (**accélération absolue**), $\vec{a}(M/\mathcal{R})$ l'accélération de M mesurée dans $\mathcal{R}$ (**accélération relative**),$\vec{a}_e$ l'**accélération d'entraînement** (accélération d'un point P fixe dans $\mathcal{R}$ et confondu avec M à l'instant t) et $\vec{a}_c$ **l'accélération complémentaire** (**Coriolis**).

Relations pour les accélérations

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

$$\vec{a}_e = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_gO}}{dt^2}\right|_{\mathcal{R}_g} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM})$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

1.1.2 Cinétique

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel quelconque et O un point arbitraire (pas nécessairement fixe dans $\mathcal{R}$).

Éléments cinétiques associés à une particule d'indice i : **masse** m_i, **vitesse** $\vec{v}_i$ et **accélération** $\vec{a}_i$ mesurées dans $\mathcal{R}$, **quantité de mouvement** $\vec{p}_i = m_i\vec{v}_i$, **moment cinétique** rapporté à O $\vec{\sigma}_{iO} = m_i\overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{v}_i \equiv \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{p}_i$, **énergie cinétique** $e_{ci} = \frac{1}{2}m_iv_i^2$

Équation de la dynamique
Soit $\vec{f}_i$ la force appliquée à la particule i

$$m_i\left.\frac{d\vec{v}_i}{dt}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{f}_i + \vec{f}_{i,inertie}$$

$$\vec{f}_{i,inertie} = -m_i\,(\vec{a}_{i,e} + \vec{a}_{i,c})$$

avec $\vec{a}_{i,e}$ accélération d'entraînement et $\vec{a}_{i,c}$ accélération de Coriolis de la particule i.

Système physique composé de N particules ($i = 1, ..., N$) : masse totale $\mathsf{M} = \sum_{i=1}^{N} m_i$, impulsion $\vec{P} = \mathsf{M}\vec{v}_G = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$, moment cinétique $\vec{\Sigma}_O = \sum_{i=1}^{N} \vec{\sigma}_{iO}$, énergie cinétique $T = \sum_{i=1}^{N} e_{ci} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}m_iv_i^2$.

Barycentre[2] **(centre de gravité) G du système**

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OM}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

ou

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{GM}_i = \overrightarrow{0}$$

Référentiel barycentrique $\mathcal{R}_B$
On prend comme origine le barycentre G et un système d'axes qui restent constamment parallèles deux à deux aux axes d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$

$$\overrightarrow{\Omega}\ (\mathcal{R}_B/\mathcal{R}_g) \equiv \overrightarrow{0}$$

1.1.3 Théorème du barycentre

(mouvement du barycentre évalué dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$)

$$\mathsf{M}\left.\frac{d\overrightarrow{v}_G}{dt}\right|_{\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{R} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{f}_i$$

où M désigne la masse totale du système, $\overrightarrow{R}$ est la résultante des forces appliquées (forces extérieures et forces de contact ou de liaison seules prises en compte, les forces intérieures s'annulant deux à deux dans la sommation).

1.1.4 Théorème du moment cinétique

(mouvements du système évalués dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}_B$)

$$\left.\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Sigma}_G\right|_{\mathcal{R}_B} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_G \equiv \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{GM_i} \wedge \overrightarrow{f}_i$$

où le vecteur $\overrightarrow{\Sigma}_G$ représente le moment cinétique du système rapporté au barycentre G et $\overrightarrow{\mathcal{M}}_G$ le moment résultant des forces appliquées (calculé par rapport à G).

2. Les termes de **centre de masse** ou de **centre d'inertie** semblent plus appropriés car ces derniers ne sont pas liés à la notion très particulière de poids (le terme de barycentre, issu de $\beta\alpha\rho\acute{\upsilon}\varsigma$: pesant, est consacré par l'usage depuis Archimède).

1.1.5 Théorèmes de König

Moment cinétique et énergie cinétique d'un système (masse totale M) mesurés dans $\mathcal{R}_g$: $\overrightarrow{\Sigma}_O$ et $T/\mathcal{R}_g$, puis mesurés dans $\mathcal{R}_B$: $\overrightarrow{\Sigma}_G$ et $T/\mathcal{R}_B$, on a

$$\overrightarrow{\Sigma}_O = \overrightarrow{\Sigma}_G + \overrightarrow{OG} \wedge \mathsf{M}\overrightarrow{v}_G$$

$$T/\mathcal{R}_g = T/\mathcal{R}_B + \frac{1}{2}\mathsf{M}v_G^2$$

1.1.6 Tenseur d'inertie

Corps solide
Système physique où les distances entre les particules sont invariables. On lie généralement au corps solide un **référentiel tournant** $\mathcal{R}_S$. La rotation du corps perçue dans le référentiel barycentrique est définie par un vecteur rotation, unique, $\overrightarrow{\Omega}$ tel que

$$\overrightarrow{\Omega} \equiv \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_S/\mathcal{R}_B)$$

Tenseur d'inertie

$$\overline{\overline{I}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

exprimé dans un repère quelconque (Gx, Gy, Gz) avec $I_{xx} = \int_V dm(y^2 + z^2)$ **moment d'inertie** par rapport à l'axe Gx, ... ; $I_{xy} = -\int_V dm\, xy$, ... **produits d'inertie**, V est le volume du corps.

Moment cinétique d'un solide

$$\overrightarrow{\Sigma}_G = \overline{\overline{I}}.\overrightarrow{\Omega}$$

Énergie cinétique de rotation d'un solide

$$T = \frac{1}{2}{}^T\overrightarrow{\Omega}.\overline{\overline{I}}.\overrightarrow{\Omega}$$

Vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega} \left| \begin{array}{l} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{array} \right.$ vecteur transposé ${}^T\overrightarrow{\Omega} \left| \; \Omega_x \quad \Omega_y \quad \Omega_z \right.$.

On introduit un repère particulier, appelé **repère principal** $\left(G, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, lié à $\mathcal{R}_S$ (référentiel du corps tournant), dans lequel le tenseur d'inertie est diagonal, soit

$$\overline{\overline{I}} = \left(\begin{array}{ccc} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{array} \right)$$

Exemples : boule homogène (rayon R) : $A = B = C = \frac{2}{5}\mathsf{M}R^2$; cylindre homogène (rayon R et hauteur H) : $A = B = \frac{1}{12}\mathsf{M}\left(3R^2 + H^2\right)$, $C = \frac{1}{2}\mathsf{M}R^2$; tige homogène de longueur L : $A = B = 0$, $C = \frac{1}{12}\mathsf{M}L^2$ (M désigne dans chacun de ces exemples la masse totale du corps).
On pose usuellement

$$\overrightarrow{\Omega} = p\,\overrightarrow{i} + q\,\overrightarrow{j} + r\,\overrightarrow{k}$$

ce qui donne

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

1.1.7 Théorème de Huygens

Soit $z'z$ un axe quelconque passant par le barycentre G et $u'u$ un axe parallèle à $z'z$ et distant de Δ, on a

$$I_{u'u} = I_{zz} + \mathsf{M}\Delta^2$$

1.2 Énoncés des problèmes

Problème 1 : cylindre roulant sur un plan incliné mobile

Un cylindre homogène, de rayon r et de masse m, roule sans glisser sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. L'angle de rotation du cylindre sera dénoté par θ (origine des angles arbitraire) et l'abscisse de son barycentre G le long du plan incliné sera désignée par x. Le plan incliné est la face hypoténuse d'un prime rectangulaire mobile, de masse M, qui glisse sans frottement sur une table horizontale fixe.

1/ Écrire la condition de non-glissement du cylindre sur le plan.

2/ Soit $\mathcal{R}_g$ un référentiel galiléen (repère associé O, X, Y) et $\mathcal{R}$ le référentiel du prisme. Calculer l'énergie cinétique du cylindre mesurée dans $\mathcal{R}_g$.

3/ Établir l'expression du lagrangien du système *cylindre + prisme* soumis à un champ de pesanteur vertical et uniforme $\overrightarrow{g}$.

4/ En déduire les équations de la dynamique. Déterminer les accélérations respectives du cylindre et du prisme.

Problème 2 : effet draw shot

On analyse ici le mouvement d'une boule homogène et indéformable, de masse M et de rayon a, se déplaçant sur un plan horizontal.

1/ Rappeler sans démonstration le théorème du centre de masse et le théorème du moment cinétique. On fera intervenir le poids $\overrightarrow{P}$ (champ de pesanteur uniforme $\overrightarrow{g}$) et la réaction du plan $\overrightarrow{R}$. On admet, en outre, l'existence d'une force $\overrightarrow{F}$, localisée au point Q situé à la périphérie de la boule (fig. 1).

2/ Lorsque la force $\overrightarrow{F}$ en question n'agit que sur une durée très courte τ (comparée à un intervalle de temps caractéristique du mouvement ultérieur de la boule), la **percussion**$\overrightarrow{\Delta p}$ (agissant en Q) est définie par la relation suivante

$$\overrightarrow{\Delta p} = \int_{-\tau}^{0} dt\,\overrightarrow{F}$$

i/ Compléter la figure 1 avec toutes les données du problème. On décomposera la réaction du plan $\overrightarrow{R}$ en ses composantes horizontale $\overrightarrow{T}$ et verticale $\overrightarrow{N}$.

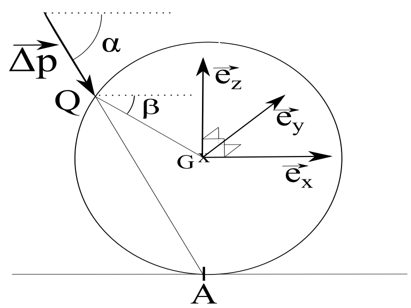

Figure 1

ii/ Écrire les conditions initiales pour les deux équations précédentes.

3/ Intégrer les deux équations établies à la question 1/ en admettant que le mouvement est horizontal et rectiligne suivant l'axe Ox. La première phase du mouvement s'effectuant avec glissement, on utilisera la **relation de Coulomb**, soit $\left|\overrightarrow{T}\right| = fN$, f étant le coefficient de frottement.

4/ Discuter les différentes phases possibles du mouvement.

Problème 3 : équations d'Euler et polhodie

1/ Soit $\mathcal{R}$ un référentiel quelconque. La vitesse d'une particule M, de masse m, évaluée dans ce référentiel est $\overrightarrow{v}$. Rappeler l'expression de son moment cinétique $\overrightarrow{\sigma}_O$ par rapport à une origine arbitraire, non nécessairement fixe O.

2/ On s'intéresse au cas d'un système composé de N particules ($M_{i=1,\ 2,\ldots,N}$, masses m_i, vitesses $\overrightarrow{v}_i$). Calculer la dérivée du moment cinétique total du système, soit $\overrightarrow{\Sigma}_O$, par rapport au temps. Montrer que si O est confondu avec le barycentre G du système, l'expression trouvée se simplifie.

3/ Rappeler la définition du référentiel barycentrique (que l'on dénotera $\mathcal{R}_B$). Établir, dans $\mathcal{R}_B$, la relation suivante

$$\left.\frac{d\overrightarrow{\Sigma}_G}{dt}\right|_{\mathcal{R}_B} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_G$$

où $\overrightarrow{\mathcal{M}}_G$ désigne le moment résultant des forces appliquées au système (on en rappellera également la définition).

4/ On suppose que le système précédent est assimilé à un corps solide (distance M_iM_j invariable pour tout couple de points M_i, M_j). Si l'on admet que ce corps tourne dans le référentiel $\mathcal{R}_B$, il existe dès lors un vecteur rotation unique $\overrightarrow{\Omega}$ qui peut dépendre du temps t mais est indépendant du point. On considère alors un second référentiel $\mathcal{R}_S$, dans lequel le corps est supposé fixe.