Chapitre 1

Dynamique des systèmes

1.1 Systèmes

Avant toute autre chose, on doit en mécanique bien préciser ce que l'on entend par système. On appelle **système** une partie de l'Univers que l'on isole par la pensée. Cette partie peut être effectivement limitée par une surface matérialisée, ce qui fait alors du système un corps ou un objet bien défini. Mais le corps peut encore être composite. Dans ce cas, il s'agit d'un choix délibéré de l'observateur ou de l'expérimentateur. Une fois le système défini, et s'il n'est pas isolé, son environnement avec lequel il interagit doit aussi être connu.

– **Systèmes discrets**
Un système discret est composé de N points matériels ou particules $M_{i=1,\ldots,N}$ repérés par les rayons vecteurs $\vec{r}_i(t)$ par rapport à une origine arbitraire. Dans l'espace physique, tridimensionnel, le nombre de composantes pour représenter un vecteur est trois. La connaissance d'un système discret formé de N points matériels nécessite donc la donnée de $3N$ coordonnées d'espace. Chaque particule est affectée d'une masse m_i.

– **Systèmes continus**
Dans un système continu, on ne peut plus individualiser les points matériels [1]. La démarche consiste alors à découper par la pensée le système en cellules élémentaires jointives, suffisamment petites pour pouvoir considérer celles-ci comme homogènes. On peut considérer que ces cellules sont déformables et possèdent des volumes distincts, mais qu'elles ont une même masse, constante, dénotée par dm.

1. D'un point de vue mathématique, passer d'un système discret à un système continu revient à passer d'un ensemble dénombrable fini ou infini (ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$) à un ensemble indénombrable (ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$).

Il existe deux cas particuliers très intéressants :

a/ Le fluide incompressible

La masse volumique est constante, indépendante du point et du temps.

b/ Le solide idéal

Les distances entre les points qui le constituent sont invariables car le solide idéal est par définition infiniment rigide.

Commentaire 1 : remarquons aussi qu'un fluide peut avoir un comportement de corps solide s'il effectue une translation globale ou une rotation globale. La distinction entre fluides et solides est d'autre part assez floue. On peut encore considérer un solide idéal comme un fluide dont la viscosité est infiniment grande.

1.2 Cinétique

Soit un système matériel $\mathcal{S}$ qui évolue en fonction du temps. Un certain nombre de grandeurs physiques le caractérisant lui sont affectées [2] :

– **Masse**

$$\mathsf{M} = \sum_i m_i$$

– **Centre d'inertie (barycentre)**

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i}{M} \qquad \sum_i m_i \overrightarrow{GM}_i = \vec{0}$$

On introduit un référentiel quelconque $\mathcal{R}$ pour mesurer les quantités cinématiques (vitesses $\vec{v}_i$ et accélérations $\vec{a}_i$)

– **Quantité de mouvement**

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i = \mathsf{M}\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$$

– **Quantité d'accélération**

$$\vec{S} = \sum_i \vec{s}_i = \sum_i m_i \vec{a}_i = \frac{d\vec{P}}{dt} = \mathsf{M}\frac{d\vec{v}_G}{dt} = \mathsf{M}\vec{a}_G$$

On note que

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{S}$$

2. Le lecteur peut se reporter utilement aux rappels de mécanique du point présentés en fin de volume.

– **Énergie cinétique**

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2$$

En plus du référentiel $\mathcal{R}$, on introduit désormais un point O

– **Moment cinétique par rapport à** O

$$\vec{\Sigma}_O = \sum_i \vec{\sigma}_{Oi} = \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge (m_i \vec{v}_i)$$

– **Moment dynamique par rapport à** O

$$\vec{K}_O = \sum_i \vec{k}_{Oi} = \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge (m_i \vec{a}_i)$$

Commentaire 2 : les deux grandeurs quantité de mouvement et moment cinétique sont additives.

Commentaire 3 : le moment cinétique dépend du point O. Rapporté à un autre point O', on a

$$\begin{aligned}\vec{\Sigma}_{O'} &= \sum_i \overrightarrow{O'O} \wedge (m_i \vec{v}_i) + \overrightarrow{OM_i} \wedge (m_i \vec{v}_i) \\ &= \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{P} + \vec{\Sigma}_O\end{aligned}$$

De même pour le moment dynamique

$$\begin{aligned}\vec{K}_{O'} &= \sum_i \overrightarrow{O'O} \wedge (m_i \vec{a}_i) + \overrightarrow{OM}_i \wedge (m_i \vec{a}_i) \\ &= \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{S} + \vec{K}_O\end{aligned}$$

Pour les dérivées de ces quantités, il vient

$$\frac{d\vec{\Sigma}_O}{dt} = -\vec{v}_O \wedge \vec{P} + \vec{K}_O$$

et

$$\frac{d\vec{\Sigma}_{O'}}{dt} = (\vec{v}_O - \vec{v}_{O'}) \wedge \vec{P} + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{S} + \frac{d\vec{\Sigma}_O}{dt}$$

Si O est fixe dans $\mathcal{R}$ alors

$$\frac{d\vec{\Sigma}_O}{dt} = \vec{K}_O$$

et

$$\frac{d\vec{\Sigma}_{O'}}{dt} = -\vec{v}_{O'} \wedge \vec{P} + \vec{K}_{O'}$$

Commentaire 4 : pour un système continu, toutes les expressions précédentes s'expriment sous forme intégrale suivant la procédure suivante (avec suppression partout de l'indice i)

$$\sum_i \longrightarrow \int_V \quad m_i \longrightarrow dm = dv\rho$$

où $\rho \equiv \rho(M,t)$ est la masse volumique mesurée au point M à l'instant t (physiquement cette opération revient à étaler la masse m_i dans un élément de volume dv).
Exemple : pour la position du centre d'inertie, on a

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\int_V dv\rho\, \overrightarrow{OM}}{\mathsf{M}}$$

1.3 Référentiel barycentrique

Le référentiel barycentrique joue un rôle particulier lorsque l'on désire étudier les mouvements d'un système matériel. Ce référentiel, que nous dénoterons par $\mathcal{R}_B$, est défini de la façon suivante

a/ Le barycentre G est fixe dans $\mathcal{R}_B$.

b/ Les axes d'un repère quelconque lié à $\mathcal{R}_B$ restent constamment deux à deux parallèles, quel que soit t, à ceux d'un repère lié à un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$.

– Conséquences pratiques, dans $\mathcal{R}_B$:

$$\text{Barycentre fixe } \Longrightarrow \vec{v}(G/\mathcal{R}_B) \equiv \vec{0} \text{ et } \vec{a}(G/\mathcal{R}_B) \equiv \vec{0}$$

Soit A un point quelconque (pas nécessairement fixe dans $\mathcal{R}_B$). On a

$$\vec{\Sigma}_A|_{\mathcal{R}_B} = \overrightarrow{AG} \wedge \mathsf{M}\vec{v}(G/\mathcal{R}_B) + \vec{\Sigma}_G|_{\mathcal{R}_B} = \vec{\Sigma}_G|_{\mathcal{R}_B} \equiv \vec{\Sigma}_G$$

Le moment cinétique du système calculé dans le référentiel barycentrique est indépendant du point de référence. De même, on peut montrer que

$$\vec{\Sigma}_G|_{\mathcal{R}_B} = \vec{\Sigma}_G|_{\mathcal{R}_g} \equiv \vec{\Sigma}_G$$

On a également

$$\vec{K}_A|_{\mathcal{R}_B} = \overrightarrow{AG} \wedge \mathsf{M}\vec{a}(G/\mathcal{R}_B) + \vec{K}_G|_{\mathcal{R}_B} = \vec{K}_G|_{\mathcal{R}_B} \equiv \vec{K}_G$$

et

$$\frac{d\vec{\Sigma}_G}{dt} = \vec{K}_G$$

La dérivée de $\vec{\Sigma}_G$ étant évidemment effectuée dans le référentiel $\mathcal{R}_B$.

1.4 Théorèmes de König

Soit $\mathcal{R}_g$ un référentiel galiléen quelconque et $\mathcal{R}_B$ le référentiel barycentrique. Quand il y a deux référentiels ou plus, il est impératif de préciser dans lequel sont mesurées les vitesses et accélérations. Ceci vaut également lorsque l'on effectue les dérivées des vecteurs. On désignera donc ici par $\vec{v}_i$ et $\vec{v}_{ri}$ les vitesses mesurées respectivement dans $\mathcal{R}_g$ et $\mathcal{R}_B$. Soit O un point fixe dans $\mathcal{R}_g$. On a

$$\vec{\Sigma}_O = \textstyle\sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge (m_i\vec{v}_i) \quad \vec{\Sigma}_G = \sum_i \overrightarrow{GM}_i \wedge (m_i\vec{v}_{ri})$$

$$T = \textstyle\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 \quad T_B = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{ri}^2$$

Compte tenu de la formule d'addition de vitesses

$$\vec{v}_i = \vec{v}_G + \vec{v}_{ri}$$

On démontre que

–**Théorème 1 de König**

$$\vec{\Sigma}_O = \vec{\Sigma}_G + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}$$

– **Théorème 2 de König**

$$T = T_B + \frac{1}{2}\mathsf{M}v_G^2$$

Exercice : démontrer les deux théorèmes de König.

Solution :

$$\vec{\Sigma}_O = \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge (m_i\vec{v}_i) = \overrightarrow{OG} \wedge \sum_m m_i\vec{v}_i + \sum_i \overrightarrow{GM}_i \wedge (m_i\vec{v}_i)$$

$$= \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} + \sum_i \overrightarrow{GM}_i \wedge (m_i\vec{v}_{ri}) + \left(\sum_i m_i\overrightarrow{GM}_i\right) \wedge \vec{v}_G = \vec{\Sigma}_G + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P}$$

$$T = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2}m_i(\vec{v}_{ri} + \vec{v}_G)^2 = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{ri}^2 + (\sum_i m_i\vec{v}_{ri}).\vec{v}_G + \frac{1}{2}\mathsf{M}v_G^2$$

$$= \sum_i \frac{1}{2}m_i v_{ri}^2 + \frac{1}{2}\mathsf{M}v_G^2 = T_B + \frac{1}{2}\mathsf{M}v_G^2$$

1.5 Le contact entre deux solides

Soit deux solides $\mathcal{S}$ (limité par la surface S) et $\mathcal{S}_e$ (limité par la surface S_e), le solide $\mathcal{S}_e$ représentant le milieu extérieur (fig. 1.1). Le contact entre deux solides est difficile à modéliser. On envisagera ici et dans la suite un contact ponctuel, c'est-à-dire réalisé en un seul point A commun à S et S_e. En ce point on peut dès lors définir un plan tangent commun à ces deux surfaces. Soit $\vec{n}$ un vecteur unitaire normal à π et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires d'origine A et pris dans π (mais de directions arbitraires). Le repère $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ constitue un repère dit instantané. Soit $\vec{\omega}\,(S/S_e)$ le vecteur rotation instantané du solide $\mathcal{S}$ par rapport au solide $\mathcal{S}_e$. On peut décomposer ce vecteur comme suit

$$\vec{\omega}\,(S/S_e) \;= \omega_{ru}\vec{u} + \omega_{rv}\vec{v} + \omega_p\vec{n}$$

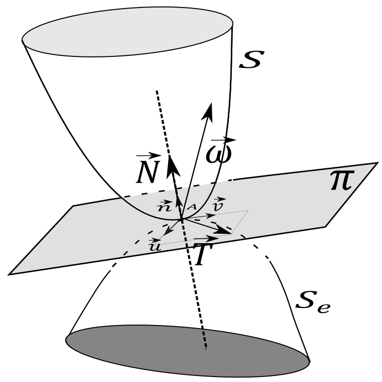

Figure 1.1

Le vecteur $\vec{\omega}_r = \omega_{ru}\vec{u} + \omega_{rv}\vec{v}$ est le **vecteur roulement** et $\vec{\omega}_p = \omega_p\vec{n}$ le **vecteur pivotement**.
Dans un système matériel (solide $\mathcal{S}$), les points intérieurs interagissent entre eux et aussi avec les points constituant le milieu extérieur (solide $\mathcal{S}_e$).

– **Loi des actions réciproques**

$$\vec{F}_{i\to j} = -\vec{F}_{j\to i} \quad \vec{F}_{i\to j} + \vec{F}_{j\to i} = \vec{0}$$

les flèches représentant le sens des interactions.

– **Forces intérieures**

Leur résultante est

$$\vec{F}_{int} = \sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \vec{F}_{i\to j} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \left(\vec{F}_{i\to j} + \vec{F}_{j\to i}\right)$$

Selon la loi des actions réciproques dans un système matériel les forces intérieures s'annulent deux à deux et

$$\vec{F}_{int} = \vec{0}$$

– **Forces extérieures**

$$\vec{F}_{e\to i} = -\vec{F}_{i\to e}$$

Leur résultante est

$$\vec{F}_{ext} = \sum_e \sum_i \vec{F}_{e\to i} \neq \vec{0}$$

– **Cas particulier des forces de contact**

Les **forces de contact** agissent à très courte distance (de l'ordre des distances interatomiques). L'interaction aura lieu dans la situation présente entre les points $C \in \mathcal{S}$ et $C_e \in \mathcal{S}_e$ confondus au niveau macroscopique avec le point géométrique A et

$$\vec{F}_{C_e\to C} = -\vec{F}_{C\to C_e}$$

Les forces de contact doivent être comptées parmi les forces extérieures.
Dans le cas d'un solide $\mathcal{S}$ en contact avec un support (solide $\mathcal{S}_e$), cette force est usuellement dénotée par $\vec{R}$. La réaction du support se décompose alors en une force normale au plan tangent π, soit $\vec{N} = N\vec{n}$, et une force tangentielle $\vec{T} = T_u\vec{u} + T_v\vec{v}$ (fig.1), soit

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$$

et

$$\vec{N} = N\vec{n} \qquad \vec{T} = T_u\vec{u} + T_v\vec{v}$$

Commentaire 5 : le vecteur $\vec{T}$ peut représenter soit une **force d'adhérence** si les surfaces en contact ne glissent pas l'une contre l'autre, soit une **force de frottement** s'il y a glissement relatif.

1.6 Théorèmes généraux de la dynamique des solides

Soit un référentiel quelconque $\mathcal{R}$. Dans ce référentiel le mouvement général d'un solide peut se décomposer en un mouvement de translation et un mouvement de rotation autour d'un axe instantané.

– **Translation pure**
Le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ est nul. Tout point M du solide a même vitesse à un instant donné, celle du barycentre $\vec{v}_G$. Le champ de vitesse est uniforme (les vecteurs vitesse sont parallèles et de même module).

– **Rotation pure**
À un instant donné, Il existe un vecteur rotation $\vec{\omega}$ non nul tel que, pour deux points P, M quelconques pris à l'intérieur du solide $\mathcal{S}$

$$\vec{v}\,(M) - \vec{v}(P) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{PM}$$

Si P est confondu avec le barycentre G alors

$$\vec{v}\,(M) = \vec{v}_G + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}$$

Pour le point de contact instantané du solide (point C) avec un support (point C_e), on a

$$\vec{v}\,(C) = \vec{v}_G + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GC}$$

Si le solide ne glisse pas sur le support, on exprime la **condition de non-glissement** : $\vec{v}\,(C) = \vec{v}\,(C_e)$.

a/ Rotation autour d'un point fixe
Si le solide possède un point fixe dans $\mathcal{R}$, on parle de rotation autour d'un point fixe. Par exemple, dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}_B$, le barycentre G est par définition fixe et

$$\vec{v}\,(M/\mathcal{R}_B) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{GM}$$

b/ Rotation autour d'un axe fixe

Si une droite Δ de $\mathcal{S}$ est fixe dans $\mathcal{R}$, on parle de rotation autour d'un axe fixe. Dans ce cas particulier le vecteur rotation a une direction fixe indépendante du temps (mais la norme de ce vecteur peut encore dépendre du temps).
Dans la décomposition du mouvement d'un solide en un mouvement de translation pure et un mouvement de rotation pure autour d'un axe instantané, deux vecteurs jouent un rôle important : la vitesse du barycentre $\vec{v}_G$ (translation) et le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ (rotation instantanée). Ces vecteurs ayant chacun trois composantes, le problème du mouvement d'un solide consiste donc à connaître l'évolution de ces six composantes indépendantes (problème à six degrés de liberté). Il faut donc six équations scalaires ou deux équations vectorielles. Ces équations nous sont fournies par les théorèmes suivants