Chapitre 1

Nombres réels et nombres complexes

Présentation

Si on considère une équation du second degré à coefficients complexes, on peut encore déterminer les solutions à l'aide du discriminant. Cependant, il est nécessaire d'en déterminer une racine carrée, éventuellement complexe :

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow (a+ib)^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = \mathrm{Re}(\Delta) \\ 2ab = \mathrm{Im}(\Delta) \end{cases}$$

L'identification des modules dans la première égalité nous permet alors d'ajouter une dernière équation au système : $a^2 + b^2 = |\Delta|$. On peut ainsi déterminer a et b puis une racine carrée $\delta = a + ib$ de Δ.

On peut donc adapter le programme de résolution des équations du second degré vu en Terminale S aux nombres complexes :

```
from math import *
def trinome(a,b,c):
  D=b**2-4*a*c
    if D==0:
    return -b/2*a
  else:
    if D.imag>=0:
      d=sqrt((abs(D)+D.real)/2)+1j*sqrt((abs(D)-D.real)/2)
    else:
      d=sqrt((abs(D)+D.real)/2)-1j*sqrt((abs(D)-D.real)/2)
      return (-b+d)/2*a,(-b-d)/2*a


>>> trinome(1,-3-1j,4+3j)
((2-1j),(1+2j))
```

Nombres réels

Proposition 1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On a : $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

Inégalités

Définition. $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\geq$ définie par : $a \geq b \Leftrightarrow a - b \geq 0$.

Proposition 2. (Compatibilité des opérations) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. La relation d'ordre $\geq$ est compatible avec les opérations sur $\mathbb{R}$:

(i) $\forall\, c, d \in \mathbb{R},\ a \geq b,\ c \geq d \Rightarrow a + c \geq b + d$;

(ii) $\forall\, c, d \in \mathbb{R},\ a \geq b \geq 0,\ c \geq d \geq 0 \Rightarrow ac \geq bd \geq 0$.

La multiplication par un nombre négatif inverse une inégalité.

Valeur absolue

Définition. Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **valeur absolue** de x le réel noté $|x|$ et défini par : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

Proposition 3. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

(i) $|x| \geq 0$ et $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) $|x| = \max(x, -x)$;

(iii) $\sqrt{x^2} = |x|$;

(iv) $|xy| = |x||y|$ et, pour $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$;

(v) $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ (**inégalité triangulaire**).

Nombres complexes

Ecriture algébrique et représentation

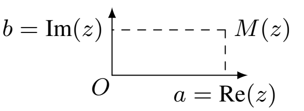
Définition. L'ensemble des **nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$, est l'ensemble $\{a + ib,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$, où i vérifie la relation $i^2 = -1$. On définit la somme et le produit de deux nombres complexes par :

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b') \quad \text{et} \quad (a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

Proposition 4. Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. On a : $z\,z' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$.

Théorème 5. (Existence et unicité de l'écriture algébrique) Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$. Les réels a et b sont respectivement appelés **partie réelle** et **partie imaginaire** de z. On note $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.

On identifie le plan complexe au plan usuel : tout point $M(a, b)$ désigne le point d'**affixe** $z = a + ib$ qu'on note $M(z)$.



Définition. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On appelle **conjugué** de z le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.

Proposition 6. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

(i) $\overline{\overline{z}} = z$; (ii) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; (iii) $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$; (iv) si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

Proposition 7. (Caractérisation des nombres réels et imaginaires purs) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

(i) $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$; (ii) $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$; (iii) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$; (iv) $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = -z$.

Module et argument d'un nombre complexe

Définition. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On appelle **module** de z le nombre réel noté $|z|$ et défini par :

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Proposition 8. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

(i) $|z| \geq 0$ et $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ (ii) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$ (iii) $|\overline{z}| = |z|$

(iv) $|zz'| = |z||z'|$ (v) si de plus $z' \neq 0$, $|\dfrac{z}{z'}| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

Proposition 9. (Inégalité triangulaire) Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$,

$$\big||z| - |z'|\big| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

et on a le cas d'égalité : $|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow z' = 0$ ou $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+,\ z = \alpha z'$.

Le cas d'égalité signifie que O, $M(z)$ et $M'(z')$ sont alignés sur une même demi-droite d'origine O.

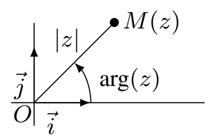
Définition. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On appelle **argument** de z tout nombre réel θ vérifiant :

$$z = |z|\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big).$$

On note $\arg(z)$ n'importe quel argument du nombre complexe z.

Définition. Soit $\theta, \theta', \alpha \in \mathbb{R}$. On note $\theta \equiv \theta'\ [\alpha]$ lorsque $\theta - \theta' \in \alpha\mathbb{Z}$.

Si on considère le point $M(z)$ dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le module représente la distance OM et l'argument donne une mesure de l'angle des vecteurs $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.



Proposition 10. Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ non nuls. On a :

$$z = z' \Leftrightarrow |z| = |z'| \quad \text{et} \quad \arg(z) \equiv \arg(z')\ [2\pi].$$

Proposition 11. Soit $z, z' \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On a :

(i) $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$; (ii) $\arg(zz') \equiv \arg(z)+\arg(z')\ [2\pi]$; (iii) $\arg(\frac{z}{z'}) \equiv \arg(z)-\arg(z')\ [2\pi]$.

Proposition 12. (Caractérisation des nombres réels et imaginaires purs) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On a :

(i) $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0\ [\pi]$; (ii) $z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Définition. On pose pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Ainsi, tout nombre complexe non nul peut s'écrire sous **forme trigonométrique** :

$$z = re^{i\theta} \quad \text{avec } r = |z| > 0 \text{ et } \theta \equiv \arg(z)\ [2\pi].$$

Proposition 13. Soit $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. On a :

(i) $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'\ [2\pi]$; (ii) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; (iii) $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; (iv) $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.

Proposition 14. (Formules d'Euler et de de Moivre) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

(i) $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$;

(ii) pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ qui s'écrit encore : $(\cos(\theta)+i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$.

Définition. On définit l'**exponentielle complexe** pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$ par :

$$e^z = e^a e^{ib} = e^a\big(\cos(b) + i\sin(b)\big)$$

Proposition 15. Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. On a :

(i) $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \neq 0$; (ii) $\dfrac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'}$; (iii) $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$; (iv) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$

Proposition 16. Soit $z, z' \in \mathbb{C}$. On a : $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Nombres complexes de module 1

Définition. On appelle **cercle trigonométrique** l'ensemble des nombres complexes de module 1 noté $\mathbb{U}$ qu'on peut paramétrer de plusieurs façons :

$$\mathbb{U} = \big\{M\big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big),\ \theta \in \mathbb{R}\big\} = \{M(e^{i\theta}),\ \theta \in \mathbb{R}\}$$

Théorème 17. (Relation fondamentale) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a : $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

Formules géométriques. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

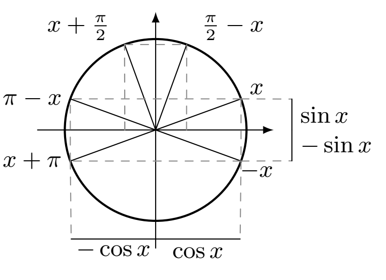
(i) $\cos(-x) = \cos(x),\ \sin(-x) = -\sin(x)$;

(ii) $\cos(x+\pi) = -\cos(x),\ \sin(x+\pi) = -\sin(x)$;

(iii) $\cos(\frac{\pi}{2}+x) = -\sin(x),\ \sin(\frac{\pi}{2}+x) = \cos(x)$;

(iv) $\cos(\frac{\pi}{2}-x) = \sin(x),\ \sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos(x)$;

(v) $\cos(\pi-x) = -\cos(x),\ \sin(\pi-x) = \sin(x)$.



Proposition 18. (Formules d'addition, soustraction, duplication et linéarisation) Soit $a, b, x \in \mathbb{R}$.

(i) $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

(ii) $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$

(iii) $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$

(iv) $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

(v) $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$

(vi) $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) - \cos(a-b)\right]$

(vii) $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$

Proposition 19. (Formules du demi-angle) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On a les factorisations :

$$e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\tfrac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}} \quad \text{et} \quad e^{i\,a} - e^{i\,b} = 2i \sin\left(\tfrac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}.$$

Ces formules permettent de trouver les factorisations de $\cos a + \cos b$ et de $\sin a + \sin b$.

Proposition 20. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On pose $A = |\alpha + i\,\beta|$ et $\varphi = \arg(\alpha + i\,\beta)$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \, \cos x + \beta \, \sin x = A \cos(x - \varphi).$$

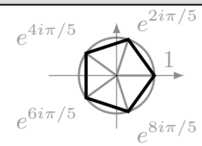
Équations dans $\mathbb{C}$

Racines de l'unité

Théorème 21. (Racines n-ièmes de l'unité) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$z^n = 1 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!], \quad z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

Cette équation possède donc n solutions qui forment les sommets d'un polygone régulier (comme le montre le dessin pour $n = 5$).



Corollaire 22. (Racines n-ièmes d'un complexe) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. On a :

$$z^n = z_0 \Leftrightarrow \exists k \in [\![0, n-1]\!], \quad z = |z_0|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\arg(z)}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

Équation $e^z = z_0$

Théorème 23. Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On a :

$$e^z = z_0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = \ln|z_0| \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) \equiv \arg(z_0)\ [2\pi].$$

Équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Proposition 24. (Équation du second degré) On considère l'équation $az^2+bz+c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq 0$. On note Δ le **discriminant** associé défini par $\Delta = b^2 - 4ac$ et on considère $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

(i) Si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution double : $z_0 = \frac{-b}{2a}$.

(ii) Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux solutions distinctes : $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$.

Proposition 25. (Relation coefficients-racines) Soit $s, p \in \mathbb{C}$. On a :

$$z_1, z_2 \text{ sont les solutions de l'équation } z^2 - sz + p = 0 \iff \begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases} .$$

Utilisation des nombres complexes en géométrie

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Définition. Si $A(a), B(b)$ sont deux points d'affixes $a, b \in \mathbb{C}$, on définit l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par $b - a$.

Proposition 26. Soit $A(a), B(b), C(c)$ des points distincts d'affixes $a, b, c \in \mathbb{C}$. On a :

$$\left|\frac{b-c}{a-c}\right| = \frac{CB}{CA} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) \ [2\pi]$$

Corollaire 27. (Configuration à trois points) Avec les notations de la proposition précédente :

1. A, B, C sont alignés si et seulement si $\frac{b-c}{a-c} \in \mathbb{R}$;
2. $\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux si et seulement si $\frac{b-c}{a-c} \in i\mathbb{R}$;

Définition. On appelle **transformation du plan complexe** toute fonction $f : z \in \mathbb{C} \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$.

Proposition 28. (Transformations de base)

1. Si $b \in \mathbb{C}$, $z \mapsto z + b$ est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.
2. Si $z \mapsto \overline{z}$ est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.
3. Si $\theta \in \mathbb{R}$, $z \mapsto e^{i\theta} z$ est la rotation de centre O et d'angle θ.
4. Si $k \in \mathbb{R}^*$, $z \mapsto kz$ est l'homothétie de rapport k.

La fin du chapitre est réservée aux MPSI

Théorème 29. (Similitudes directes) On considère

$$f : z \in \mathbb{C} \mapsto az + b$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$, $a \notin \{0, 1\}$ et on pose $z_0 = \frac{b}{1-a}$.
f est la composée commutative de la rotation de centre z_0 et d'angle $\arg(a)$, et de l'homothétie de centre z_0 et de rapport $|a|$ et est appelée **similitude directe de rapport** $|a|$ **et d'angle arg**(a).

Exercices

Exercice 1. Calcul de sommes.
Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, les sommes :

$$S_1(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx),\ S_2(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx),\ S_3(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx)$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(e^{ikx}) = \mathrm{Re}\Big(\sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k\Big).$$

On pourra citer la formule de Moivre.

On reconnaît alors la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison e^{ix}.

- si $e^{ix} = 1 \Leftrightarrow x \equiv 0\ [2\pi]$, alors $\sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.
- sinon, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k = \frac{1-(e^{ix})^{n+1}}{1-e^{ix}} = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\ (*)$$

Ne pas oublier le cas $q = 1$.

En factorisant par l'exponentielle de la demi-somme, on en déduit :

$$(*) = \frac{e^{i\frac{(n+1)}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}}} . \frac{e^{-i\frac{(n+1)}{2}x} - e^{i\frac{(n+1)}{2}x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} = e^{i\frac{nx}{2}} . \frac{(-2i)\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{(-2i)\sin(\frac{x}{2})}$$

D'où pour tout $x \neq 0\ [2\pi]$, $\sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k = e^{i\frac{nx}{2}} . \frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$

Ainsi, en prenant la partie réelle dans chacun des cas, on obtient :

$$S_1(x) = \begin{cases} n+1 & \text{si } x \equiv 0\ [2\pi] \\ \cos(\frac{nx}{2}) . \frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} & \text{sinon} \end{cases}$$

De la même façon,

$$S_2(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(e^{ikx}) = \mathrm{Im}(\sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k)$$

de sorte que :

$$S_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \equiv 0\ [2\pi] \\ \sin(\frac{nx}{2}) . \frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour les dernières sommes, il suffit de se ramener à la formule de duplication :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos^2(x) = \frac{1}{2}(1+\cos(2x))$$

Ainsi,

$$S_3(x) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=0}^{n} 1 + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \cos(k.2x)}_{S_1(2x)}\Big) = \begin{cases} n+1 & \text{si } x \equiv 0\ [\pi] \\ \frac{n+1}{2} + \cos(nx) . \frac{\sin((n+1)x)}{2\sin(x)} & \text{sinon} \end{cases}$$

De même, on pourrait calculer $S_4 = \sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx)$.

Exercice 2. Module et argument d'un nombre complexe.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1. $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+e^{i\frac{5\pi}{6}}}\right)^n$
2. $(1+i)^n + (1-i)^n$

On factorise par le module avant de reconnaître des valeurs usuelles.

1. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, z_n ce nombre complexe. On a d'une part :

$$1 - i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos(\frac{\pi}{3}) - i\sin(\frac{\pi}{3})) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

D'autre part, la factorisation par l'exponentielle de la demi-somme nous donne :

$$1 + e^{i\frac{5\pi}{6}} = e^{i\frac{5\pi}{12}}.(e^{-i\frac{5\pi}{12}} + e^{i\frac{5\pi}{12}}) = e^{i\frac{5\pi}{12}}.2\cos(\frac{5\pi}{12})$$

et ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = \left(\dfrac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{5\pi}{12}}.2\cos(\frac{5\pi}{12})}\right)^n = \frac{1}{\cos^n(\frac{5\pi}{12})}.e^{-i\frac{3n\pi}{4}}$.

Ne pas oublier de vérifier que le module est strictement positif.

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos^n(\frac{5\pi}{12}) > 0$ et finalement,

$$\begin{cases} |z_n| = \frac{1}{\cos^n(\frac{5\pi}{12})} \\ \arg(z_n) \equiv -\frac{3n\pi}{4} \ [2\pi] \end{cases}$$

2. Notons encore pour tout $n \in \mathbb{N}$, z_n ce nombre complexe. On rappelle que :

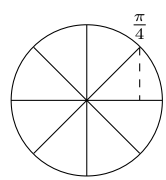
$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n = \sqrt{2}^n.\left(e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right) = \sqrt{2}^n.2\cos(\frac{n\pi}{4})$$

On en déduit que $z_n \in \mathbb{R}$. Discutons alors le signe de $\cos(\frac{n\pi}{4})$ en fonction des valeurs prises par $n \in \mathbb{N}$:

On discute les huit valeurs possibles sur un tour du cercle trigo : on dit qu'on travaille modulo 8.



- si $n = 8q$ ou $8q+1$ ou $8q+7$ où $q \in \mathbb{Z}$, alors $\cos(\frac{n\pi}{4}) > 0$ donc

$$\begin{cases} |z_n| = \sqrt{2}^n.2\cos(\frac{n\pi}{4}) \\ \arg(z_n) \equiv 0 \ [2\pi] \end{cases}$$

- si $n = 8q+2$ ou $8q+6$ où $q \in \mathbb{Z}$, alors $\cos(\frac{n\pi}{4}) = 0$ donc $z_n = 0$.
- si $n = 8q+3$ ou $8q+4$ ou $8q+5$ où $q \in \mathbb{Z}$, alors $\cos(\frac{n\pi}{4}) < 0$ donc $z_n = -\sqrt{2}^n.2\cos(\frac{n\pi}{4})e^{i\pi}$ de sorte que :

$$\begin{cases} |z_n| = -\sqrt{2}^n.2\cos(\frac{n\pi}{4}) \\ \arg(z_n) \equiv \pi \ [2\pi] \end{cases}$$