

# Table des matières

Présentation de la collection . . . . .	3
Comment utiliser ce livre ? . . . . .	5
Quelques conseils pour bien apprendre . . . . .	7
<b>SAVOIRS . . . . .</b>	<b>9</b>
Thème 1 - Le langage mathématique . . . . .	10
Thème 2 - Entiers, réels, complexes . . . . .	18
Thème 3 - Trigonométrie . . . . .	28
Thème 4 - Outils calculatoires . . . . .	33
Thème 5 - Dénombrement . . . . .	37
Thème 6 - Suites et fonctions usuelles . . . . .	40
Thème 7 - Calculs de dérivées et primitives . . . . .	52
Thème 8 - Systèmes linéaires et matrices . . . . .	58
Thème 9 - Géométrie . . . . .	70
Thème 10 - Polynômes . . . . .	76
Thème 11 - Suites réelles . . . . .	81
Thème 12 - Statistique descriptive . . . . .	89
Thème 13 - Concepts de base des probabilités . . . . .	93
Thème 14 - Limites et continuité . . . . .	100
Thème 15 - Dérivation . . . . .	107
Thème 16 - Développement limités . . . . .	112
Thème 17 - Intégration . . . . .	117
Thème 18 - Équations différentielles . . . . .	122
Thème 19 - Fonctions de deux variables . . . . .	125
Thème 20 - Variables aléatoires finies . . . . .	129
Thème 21 - Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels . . . . .	140
Thème 22 - Applications linéaires et matrices . . . . .	148
<b>SAVOIR-FAIRE . . . . .</b>	<b>155</b>
Thème 1 - Le langage mathématique . . . . .	156

Comment s'exprimer correctement en mathématiques ?	156
Décrire un ensemble avec rigueur	156
Maîtriser la terminologie et la syntaxe mathématiques	156
Comment manipuler une fonction ?	157
Déterminer un domaine de définition	157
Utiliser la notion de composée de fonctions	157
Comment montrer une égalité entre ensembles ?	158
Utiliser les règles de calcul sur les différentes opérations ensemblistes	158
Montrer une double inclusion	158
Comment étudier la bijectivité, l'injectivité ou la surjectivité d'une fonction ?	159
Utiliser la définition pour montrer l'injectivité	159
Exhiber des antécédents pour montrer la surjectivité	159
Justifier la bijectivité par l'injectivité et la surjectivité	160
Obtenir la bijectivité d'une fonction en déterminant l'application réciproque	160
À vous de jouer !	161
<b>Thème 2 - Entiers, réels, complexes</b>	<b>162</b>
Comment montrer une propriété portant sur les entiers ?	162
Raisonnement par récurrence	162
Utiliser une forme forte du théorème de récurrence	162
Comment calculer avec des nombres réels ou complexes ?	163
Développer et factoriser	163
Manipuler des inégalités en séparant les cas	164
Résoudre une (in)équation par analyse et synthèse	164
Résoudre une équation polynomiale de degré 2	165
Comment manipuler la partie entière d'un réel ?	166
Déterminer la partie entière en encadrant le réel	166
Encadrer la partie entière d'un réel	166
Établir des paliers, découper des intervalles,... afin de simplifier les parties entières	167
Comment calculer spécifiquement avec les nombres complexes ?	167
Déterminer la partie réelle ou la partie imaginaire d'un nombre complexe	167
Déterminer la forme exponentielle d'un nombre complexe	168
Utiliser « l'angle moitié »	169
Utiliser la forme exponentielle pour calculer des puissances	169
Utiliser la forme exponentielle pour résoudre une équation	170
Comment utiliser la valeur absolue ou le module ?	171
Calculer le carré de la valeur absolue ou du module	171
Majorer par l'inégalité triangulaire	171
Montrer qu'une quantité est bornée	172
À vous de jouer !	172
<b>Thème 3 - Trigonométrie</b>	<b>175</b>
Comment résoudre des (in)équations trigonométriques ?	175
Connaître les valeurs remarquables, la périodicité et les symétries	175
Écrire sous la forme d'un seul cosinus	176
Comment obtenir des relations trigonométriques ?	177
Utiliser le catalogue de formules à connaître	177
Linéariser une expression	178
Obtenir une expression polynomiale en cosinus ou sinus	178
Comment obtenir des relations sur les arcs ?	179
Simplifier les $\sin(\arcsin)$ , $\arcsin(\sin)$ ,...	179
Discuter selon l'intervalle avant de simplifier	180
À vous de jouer !	180
<b>Thème 4 - Outils calculatoires</b>	<b>182</b>
Comment calculer des sommes simples ?	182
Utiliser des sommes connues	182
Invoquer les propriétés du symbole $\sum$	182
Faire apparaître un éventuel télescopage	183
Utiliser les nombres complexes	184
Utiliser la formule du binôme de Newton	185
Comment calculer des sommes doubles ?	185

Enchaîner ou permuter les deux symboles . . . . .	185
Faire des « tranches » . . . . .	186
Comment calculer des produits ? . . . . .	187
Invoquer les propriétés du symbole $\prod$ . . . . .	187
Utiliser la notation factorielle . . . . .	188
À vous de jouer ! . . . . .	189
<b>Thème 5 - Dénombrement . . . . .</b>	<b>191</b>
Comment reconnaître les différents types de situations ? . . . . .	191
Identifier le cas où l'ordre intervient et où les répétitions sont possibles . . . . .	191
Identifier le cas où l'ordre intervient mais sans répétition . . . . .	191
Reconnaître le cas d'une énumération exhaustive . . . . .	191
Identifier le cas où l'ordre n'intervient pas . . . . .	192
Comment déterminer le cardinal d'un ensemble ? . . . . .	192
Utiliser les règles de calculs et les opérations ensemblistes . . . . .	192
Faire des « paquets » que l'on sait tous dénombrer . . . . .	193
Utiliser le complémentaire . . . . .	193
Définir une bijection avec un ensemble de cardinal connu . . . . .	193
À vous de jouer ! . . . . .	194
<b>Thème 6 - Suites et fonctions usuelles . . . . .</b>	<b>196</b>
Comment montrer des propriétés globales de suites ou de fonctions ? . . . . .	196
Étudier la monotonie d'une suite ou d'une fonction . . . . .	196
Encadrer, minorer, majorer une suite ou une fonction . . . . .	197
Comment exploiter des propriétés globales d'une fonction ? . . . . .	198
Restreindre le domaine d'étude . . . . .	198
Exploiter la monotonie dans des inégalités . . . . .	198
Transformer sommes, produits, puissances . . . . .	199
Comment calculer les termes d'une suite ? . . . . .	199
Reconnaître une suite arithmétique ou géométrique . . . . .	199
Revenir à une suite géométrique dans le cas d'une suite arithmético-géométrique . . . . .	200
Résoudre une équation complexe dans le cas d'une suite définie par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 . . . . .	200
Utiliser Python pour une approche numérique . . . . .	201
À vous de jouer ! . . . . .	201
<b>Thème 7 - Calculs de dérivées et primitives . . . . .</b>	<b>204</b>
Comment étudier une fonction ? . . . . .	204
Justifier la dérivabilité d'une fonction . . . . .	204
Calculer la dérivée d'une fonction . . . . .	204
Déterminer le sens de variation d'une fonction dérivable . . . . .	205
Comment exploiter une étude de fonction ? . . . . .	205
Interpréter le sens de variation d'une fonction . . . . .	205
Démontrer une inégalité . . . . .	206
Comment calculer les primitives d'une fonction ? . . . . .	207
Connaître des primitives usuelles . . . . .	207
Reconnaître la dérivée d'une composée de fonctions . . . . .	207
Intégrer par parties . . . . .	208
À vous de jouer ! . . . . .	209
<b>Thème 8 - Systèmes linéaires et matrices . . . . .</b>	<b>212</b>
Comment résoudre un système linéaire ? . . . . .	212
Utiliser la méthode du pivot de Gauss . . . . .	212
Traduire le problème matriciellement . . . . .	213
Utiliser des paramètres pour décrire une infinité de solutions . . . . .	213
Comment calculer avec des matrices ? . . . . .	214
Utiliser les règles algébriques . . . . .	214
Tenir compte d'une forme particulière des matrices . . . . .	214
Calculer l'inverse d'une matrice . . . . .	215
Comment calculer les puissances d'une matrice ? . . . . .	216
Émettre une hypothèse puis la démontrer par récurrence . . . . .	216
Appliquer la formule du binôme . . . . .	217

À vous de jouer ! . . . . .	218
<b>Thème 9 - Géométrie . . . . .</b>	<b>221</b>
Comment traduire des propriétés géométriques à l'aide de vecteurs ? . . . . .	221
Traduire le parallélisme . . . . .	221
Traduire l'orthogonalité de deux droites . . . . .	221
Comment décrire une droite du plan ? . . . . .	222
Utiliser un vecteur directeur . . . . .	223
Utiliser un vecteur normal . . . . .	224
Décrire une portion de droite à l'aide d'un paramétrage . . . . .	224
Comment décrire un cercle du plan ? . . . . .	225
Faire le lien entre équation cartésienne, centre et rayon . . . . .	225
Utiliser le produit scalaire . . . . .	225
Comment décrire un plan de l'espace ? . . . . .	226
Utiliser un vecteur normal . . . . .	226
Paramétrer un plan à l'aide de deux vecteurs directeurs . . . . .	227
Comment décrire une droite de l'espace ? . . . . .	228
Utiliser un vecteur directeur . . . . .	228
Considérer la droite comme intersection de deux plans . . . . .	229
Comment déterminer un barycentre ? . . . . .	229
Écrire une relation vectorielle . . . . .	229
Calculer ses coordonnées dans un repère . . . . .	230
Utiliser un barycentre partiel . . . . .	230
À vous de jouer ! . . . . .	230
<b>Thème 10 - Polynômes . . . . .</b>	<b>233</b>
Comment utiliser les spécificités des polynômes dans des calculs algébriques ? . . . . .	233
Déterminer le degré . . . . .	233
Exploiter le cas où les coefficients sont réels . . . . .	233
Comment déterminer les racines d'un polynôme ? . . . . .	234
Identifier le cas d'un polynôme de degré 2 . . . . .	234
Chercher l'ordre de multiplicité de racines connues . . . . .	234
Déduire une racine du polynôme dérivée à partir d'une racine multiple du polynôme . . . . .	235
Comment montrer que deux polynômes sont identiques ? . . . . .	235
Montrer que la différence admet « trop » de racines . . . . .	235
Comparer les racines et les degrés . . . . .	236
Comment factoriser un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ ? . . . . .	236
Trouver autant de racines distinctes que le degré du polynôme . . . . .	236
Déterminer l'ordre de multiplicité des racines distinctes . . . . .	237
À vous de jouer ! . . . . .	238
<b>Thème 11 - Suites réelles . . . . .</b>	<b>241</b>
Comment montrer qu'une suite converge ? . . . . .	241
Utiliser la définition . . . . .	241
Effectuer des opérations algébriques à partir de suites dont on connaît le comportement . . . . .	241
Utiliser le théorème de la limite monotone . . . . .	242
Encadrer par deux suites convergentes de même limite . . . . .	242
Considérer la suite des termes d'indices pairs et celle des termes d'indices impairs . . . . .	243
Utiliser la notion de suites adjacentes . . . . .	244
Montrer que la suite est équivalente à une suite convergente . . . . .	245
Comment montrer qu'une suite diverge ? . . . . .	245
Utiliser le théorème de la limite monotone . . . . .	245
Majorer ou minorer par une suite divergente de limite infinie . . . . .	246
Considérer la suite des termes d'indices pairs et celle des termes d'indices impairs . . . . .	247
Montrer que la suite est équivalente à une suite divergente . . . . .	247
Comment calculer ou approcher la limite d'une suite ? . . . . .	248
Obtenir la limite à partir d'opérations algébriques . . . . .	248
Utiliser des équivalents . . . . .	248
Obtenir une inégalité entre les limites de deux suites . . . . .	249

Utiliser l'encadrement fourni par deux suites adjacentes . . . . .	249
Utiliser Python pour une approche numérique . . . . .	250
À vous de jouer ! . . . . .	251
<b>Thème 12 - Statistique descriptive . . . . .</b>	<b>254</b>
Comment représenter des données statistiques ? . . . . .	254
Utiliser un diagramme en bâtons ou un histogramme . . . . .	254
Utiliser un nuage de points . . . . .	255
Comment décrire des données statistiques ? . . . . .	256
Calculer et exploiter les caractéristiques de position et celles de dispersion . . . . .	256
Établir un ajustement affine . . . . .	257
À vous de jouer ! . . . . .	259
<b>Thème 13 - Concepts de base des probabilités . . . . .</b>	<b>261</b>
Comment le protocole de l'expérience fournit-il des informations pratiques ? . . . . .	261
Reconnaître une situation d'équiprobabilité . . . . .	261
Reconnaître des probabilités conditionnelles . . . . .	261
Exploiter l'indépendance d'expériences . . . . .	261
Comment calculer des probabilités sans conditionnement ? . . . . .	262
Dénombrer dans le cas d'une probabilité uniforme . . . . .	262
Utiliser les propriétés fondamentales d'une probabilité . . . . .	262
Considérer un système complet d'événements . . . . .	263
Comment exploiter des probabilités conditionnelles ? . . . . .	264
Utiliser la formule des probabilités composées . . . . .	264
Lier « causes et conséquences » . . . . .	265
Utiliser la formule des probabilités totales . . . . .	266
Comment montrer l'indépendance d'événements ? . . . . .	267
Comparer numériquement $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ . . . . .	267
Manipuler formellement la définition . . . . .	267
À vous de jouer ! . . . . .	268
<b>Thème 14 - Limites et continuité . . . . .</b>	<b>272</b>
Comment montrer qu'une limite existe et la calculer ? . . . . .	272
Utiliser les règles de calcul et les croissances comparées . . . . .	272
Utiliser des inégalités . . . . .	272
Utiliser des équivalents . . . . .	273
Ramener l'étude à un calcul de limite en 0 . . . . .	273
Montrer qu'une fonction n'admet pas de limite . . . . .	274
Comment étudier la continuité d'une fonction ? . . . . .	275
Considérer la fonction comme une somme, composée, etc. de fonctions continues . . . . .	275
Utiliser la limite en un point . . . . .	275
Comment résoudre une équation à l'aide de la continuité ? . . . . .	276
Utiliser les suites pour résoudre des équations fonctionnelles . . . . .	276
Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à une fonction auxiliaire . . . . .	276
Utiliser une propriété asymptotique pour se ramener aux hypothèses du théorème des valeurs intermédiaires . . . . .	277
Comment montrer qu'une fonction continue est bornée ? . . . . .	277
Appliquer le théorème des bornes à une fonction auxiliaire . . . . .	277
Combinaison de l'utilisation du théorème des bornes avec une propriété asymptotique . . . . .	278
À vous de jouer ! . . . . .	279
<b>Thème 15 - Dérivation . . . . .</b>	<b>282</b>
Comment étudier la dérivabilité et la dérivée d'une fonction ? . . . . .	282
Utiliser les notions de dérivée à gauche ou à droite . . . . .	282
Invoyer le théorème de la bijection . . . . .	282
Utiliser les dérivées successives . . . . .	283
Comment lier la dérivée et les variations d'une fonction ? . . . . .	285
Chercher des extremums là où la dérivée s'annule . . . . .	285
Justifier l'annulation de la dérivée par le théorème de Rolle . . . . .	285
Lier l'accroissement de la fonction à sa dérivée . . . . .	286
À vous de jouer ! . . . . .	287

<b>Thème 16 - Développements limités</b>	<b>290</b>
Comment calculer des développements limités ?	290
Considérer des opérations algébriques à partir de développements limités connus	290
Intégrer des développements limités connus	291
Ramener le calcul à celui d'un développement limité en 0	291
Appliquer la formule de Taylor-Young	292
Comment obtenir un équivalent d'une fonction ou d'une suite ?	292
Considérer le premier terme non nul du développement limité	292
Utiliser une fonction « correspondant » à la suite	293
Comment exploiter des développements limités pour étudier une fonction ?	294
Calculer des limites	294
Étudier localement la fonction	295
Déterminer les éventuelles asymptotes	296
À vous de jouer !	297
<b>Thème 17 - Intégration</b>	<b>299</b>
Comment calculer une intégrale ?	299
Trouver une primitive de l'expression intégrée	299
Utiliser les propriétés de linéarité et de Chasles	299
Intégrer par parties	300
Effectuer un changement de variable	300
Utiliser des sommes de Riemann	302
Comment exploiter les propriétés de l'intégrale ?	303
Manipuler des inégalités grâce à la croissance et la positivité	303
Encadrer et majorer des intégrales	304
Calculer les limites de suites du type « sommes de Riemann »	304
À vous de jouer !	305
<b>Thème 18 - Équations différentielles</b>	<b>309</b>
Comment résoudre une équation différentielle ?	309
Résoudre l'équation homogène associée puis trouver une solution particulière	309
Utiliser le principe de superposition des solutions	309
Comment résoudre une équation homogène du premier ordre ?	309
Utiliser une primitive de $a$	309
Reconnaître le cas où $a$ est constante	310
Comment trouver une solution particulière d'une équation du premier ordre non homogène ?	310
Utiliser la méthode de la variation de la constante	310
Reconnaître le cas particulier où $a$ est constante et $b$ est d'une forme remarquable	311
Comment résoudre une équation homogène du deuxième ordre à coefficients constants ?	313
Résoudre l'équation caractéristique	313
Comment trouver une solution particulière d'une équation du deuxième ordre non homogène ?	313
Reconnaître le cas particulier où $d(t) = ke^{\lambda t}$	313
Comment résoudre une équation avec une ou plusieurs conditions initiales	314
Obtenir toutes les solutions puis ajuster les constantes correspondant aux conditions	314
À vous de jouer !	315
<b>Thème 19 - Fonctions de deux variables</b>	<b>317</b>
Comment calculer des dérivées partielles ?	317
Dériver une expression de la forme $f(x(t), y(t))$	317
Calculer les dérivées partielles d'ordre 2	318
Comment évaluer une variation de la fonction ?	319
Utiliser les dérivées partielles pour approcher une variation de la fonction	319
Comment étudier un extremum ?	320
Étudier la fonction aux points où le gradient est nul	320
À vous de jouer !	321

<b>Thème 20 - Variables aléatoires finies</b> . . . . .	<b>323</b>
Comment étudier une variable aléatoire finie ? . . . . .	323
Déterminer la loi et la fonction de répartition d'une variable aléatoire finie . . . . .	323
Calculer les paramètres de position ou de dispersion . . . . .	325
Exploiter les paramètres de position ou de dispersion . . . . .	326
Comment exploiter une situation usuelle ? . . . . .	327
Reconnaître une loi usuelle . . . . .	327
Exprimer la loi d'une variable aléatoire à partir de lois usuelles . . . . .	328
Comment manipuler un couple ou un vecteur aléatoire ? . . . . .	329
Faire le lien entre la loi conjointe, les lois marginales et les lois conditionnelles . . . . .	329
Étudier une fonction d'un couple aléatoire . . . . .	329
Exploiter l'indépendance de variables aléatoires . . . . .	331
Étudier l'indépendance de variables aléatoires . . . . .	333
À vous de jouer ! . . . . .	334
<b>Thème 21 - Espaces vectoriel et sous-espaces vectoriels</b> . . . . .	<b>338</b>
Comment déterminer si une partie de $\mathbb{K}^n$ en est un sous-espace vectoriel ? . . . . .	338
Montrer la stabilité par combinaison linéaire . . . . .	338
Exhiber une famille génératrice . . . . .	338
Trouver un exemple explicite contredisant la définition . . . . .	339
Considérer une intersection de sous-espaces vectoriels . . . . .	339
Comment étudier les propriétés d'une famille de vecteurs ? . . . . .	340
Montrer qu'une famille est génératrice . . . . .	340
Étudier la liberté d'une famille de vecteurs . . . . .	341
Déterminer le rang d'une famille de vecteurs . . . . .	342
Comment exploiter les propriétés d'une famille de vecteurs ? . . . . .	342
Déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel . . . . .	342
Exploiter la dimension et le nombre de vecteurs . . . . .	343
Montrer une inclusion entre sous-espaces vectoriels . . . . .	344
Établir l'égalité de deux sous-espaces vectoriels . . . . .	345
À vous de jouer ! . . . . .	345
<b>Thème 22 - Applications linéaires et matrices</b> . . . . .	<b>348</b>
Comment étudier la linéarité d'une application ? . . . . .	348
Montrer que l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images . . . . .	348
Associer une matrice à l'application . . . . .	349
Comment déterminer l'image et le noyau d'une application ? . . . . .	350
Résoudre un système . . . . .	350
Utiliser une famille génératrice de l'espace de départ . . . . .	350
Exploiter la dimension du noyau ou de l'image . . . . .	351
Utiliser des opérations élémentaires sur les colonnes . . . . .	353
Comment déterminer des propriétés d'une application linéaire ? . . . . .	354
Utiliser le noyau ou l'image . . . . .	354
Montrer qu'une application linéaire est bijective . . . . .	355
À vous de jouer ! . . . . .	357
 <b>CORRIGÉS DES EXERCICES</b> . . . . .	 <b>359</b>