

# Table des matières

Présentation de la collection . . . . .	3
Comment utiliser ce livre ? . . . . .	5
Quelques conseils pour bien apprendre . . . . .	7
<b>SAVOIRS . . . . .</b>	<b>9</b>
Thème 1 – Les outils de l’informatique . . . . .	10
Thème 2 – Les outils de l’analyse . . . . .	15
Thème 3 – Équations différentielles . . . . .	21
Thème 4 – Fonctions de deux variables . . . . .	28
Thème 5 – Séries et intégrales généralisées . . . . .	33
Thème 6 – Polynômes et espaces vectoriels . . . . .	40
Thème 7 – Applications linéaires et matrices . . . . .	48
Thème 8 – Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ . . . . .	56
Thème 9 – Valeurs propres et vecteurs propres . . . . .	66
Thème 10 – Généralités sur les probabilités . . . . .	69
Thème 11 – Variables aléatoires réelles . . . . .	75
Thème 12 – Indépendance et couples . . . . .	87
Thème 13 – Théorèmes limites et statistiques inférentielles . . . . .	92
<b>SAVOIR-FAIRE . . . . .</b>	<b>101</b>
Thème 1 – Les outils de l’informatique . . . . .	102
Comment travailler sur les chaînes de caractères ? . . . . .	102
Rechercher un mot . . . . .	102
Comment travailler sur les listes ? . . . . .	102
Étudier la présence d’un élément . . . . .	102
Rechercher le maximum . . . . .	103
Calculer la moyenne . . . . .	104
Comment trier une liste ? . . . . .	104
Trier par insertion . . . . .	104
Trier rapidement . . . . .	105
Comment travailler sur les graphes ? . . . . .	106
Rechercher le plus court chemin . . . . .	106
Comment simuler des variables aléatoires ? . . . . .	108
Simuler des variables aléatoires discrètes . . . . .	109
Simuler des variables aléatoires continues . . . . .	110
À vous de jouer . . . . .	111

<b>Thème 2 – Les outils de l’analyse</b>	<b>114</b>
Comment obtenir des inégalités ?	114
Manipuler algébriquement des inégalités	114
Étudier une fonction	114
Exploiter la croissance de l’intégrale	115
Comment étudier localement une fonction ou une suite ?	116
Calculer une limite	116
Exploiter des inégalités	116
Interpréter des relations locales	118
Comment exploiter les propriétés globales d’une fonction ou d’une suite ?	119
Utiliser la monotonie	119
Montrer la bijectivité d’une fonction	121
Obtenir l’existence d’une solution d’équation	122
À vous de jouer	124
<b>Thème 3 – Équations différentielles</b>	<b>127</b>
Comment calculer des primitives ?	127
Se ramener à une intégrale plus simple	127
Reconnaître une fraction rationnelle simple	129
Comment résoudre une équation différentielle ?	132
Écrire les solutions d’une équation homogène	132
Simplifier le second membre	132
Chercher une solution particulière	134
Comment déterminer la solution d’une équation avec condition(s) initiale(s) ?	136
Exploiter l’ensemble des solutions	136
Approcher numériquement la solution	137
À vous de jouer	139
<b>Thème 4 – Fonctions de deux variables</b>	<b>144</b>
Comment représenter une fonction de deux variables ?	144
Étudier des sections planes ou des lignes de niveau	144
Utiliser un outil informatique	145
Comment montrer qu’une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ ?	148
Identifier une construction à partir de fonctions usuelles	148
Étudier les dérivées partielles	149
Comment étudier une fonction de deux variables ?	150
Étudier localement la fonction aux points où le gradient est nul	150
Évaluer une petite variation de la fonction	152
À vous de jouer	153
<b>Thème 5 – Séries et intégrales généralisées</b>	<b>156</b>
Comment déterminer la nature d’une série ?	156
Vérifier si le terme général tend vers 0	156
Mettre en évidence une combinaison linéaire de séries dont la convergence est connue	156
Majorer un terme général positif par le terme général d’une série convergente	156
Minorer le terme général par le terme général positif d’une série divergente	157
Montrer la convergence absolue	158
Considérer la suite des sommes partielles	158
Comment calculer la somme d’une série convergente ?	159
Reconnaître des séries de référence de somme connue	159
Mettre en évidence une combinaison linéaire de séries convergentes de somme connue	159
Calculer explicitement les sommes partielles	160
Comment déterminer la nature d’une intégrale ?	161
Commencer par déterminer les « impropriétés »	161
Repérer le cas d’une intégrale faussement impropre	161
Utiliser la définition en invoquant une primitive	162
Mettre en évidence une combinaison linéaire d’intégrales dont la nature est connue	162
Majorer ou minorer la fonction à intégrer	163
Montrer la convergence absolue	163
Intégrer par parties	164

Changer de variable . . . . .	165
Comment calculer une intégrale convergente? . . . . .	165
Utiliser une primitive . . . . .	165
Mettre en évidence une combinaison linéaire d'intégrales . . . . .	166
Ramener le calcul à celui d'une autre intégrale à l'aide d'une intégration par parties ou d'un changement de variable . . . . .	166
À vous de jouer . . . . .	167
<b>Thème 6 – Polynômes et espaces vectoriels . . . . .</b>	<b>170</b>
Comment manipuler les polynômes? . . . . .	170
Calculer le degré d'un polynôme . . . . .	170
Chercher les racines d'un polynôme . . . . .	171
Faire le lien entre divisibilité et racine . . . . .	171
Faire le lien entre degré et nombre de racines . . . . .	172
Faire le lien entre dérivées et ordre de multiplicité d'une racine . . . . .	173
Comment montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel? . . . . .	173
Reconnaître un sous-espace vectoriel . . . . .	173
Comment travailler avec une famille de vecteurs? . . . . .	175
Montrer qu'une famille est libre . . . . .	175
Montrer qu'une famille est liée . . . . .	177
Montrer qu'une famille est génératrice d'un espace vectoriel . . . . .	177
Montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel . . . . .	178
Comment travailler avec la dimension d'un espace vectoriel? . . . . .	178
Prouver l'égalité de sous-espaces vectoriels de dimension finie . . . . .	179
Utiliser les théorèmes autour des bases . . . . .	179
À vous de jouer . . . . .	180
<b>Thème 7 – Applications linéaires et matrices . . . . .</b>	<b>183</b>
Comment résoudre un système linéaire? . . . . .	183
Utiliser l'algorithme du pivot de Gauss . . . . .	183
Interpréter le rang du système . . . . .	183
Comment étudier la linéarité d'une application? . . . . .	185
Montrer que l'image d'une combinaison linéaire est égale à la combinaison linéaire des images . . . . .	185
Invoquer la linéarité de transformations connues . . . . .	185
Exploiter la correspondance entre applications linéaires et matrices . . . . .	186
Comment déterminer l'image et le noyau d'une application? . . . . .	187
Résoudre une équation linéaire . . . . .	187
Utiliser une famille génératrice de l'espace de départ . . . . .	188
Exploiter la dimension du noyau ou de l'image . . . . .	189
Traduire matriciellement et interpréter les colonnes . . . . .	189
Comment déterminer des propriétés d'une application linéaire? . . . . .	190
Utiliser le noyau ou l'image . . . . .	190
Montrer qu'une application linéaire est bijective . . . . .	191
Étudier le rang et l'inversibilité d'une matrice . . . . .	191
Exploiter une relation polynomiale . . . . .	192
Comment passer d'une base à une autre? . . . . .	193
Considérer une matrice de passage . . . . .	193
Exprimer un vecteur ou un endomorphisme dans une nouvelle base . . . . .	194
À vous de jouer . . . . .	195
<b>Thème 8 – Produit scalaire dans <math>\mathbb{R}^n</math> . . . . .</b>	<b>200</b>
Comment travailler avec les objets géométriques simples? . . . . .	200
Décrire les objets du plan . . . . .	200
Décrire les objets de l'espace . . . . .	202
Comment travailler avec le produit scalaire? . . . . .	202
Utiliser la bilinéarité . . . . .	202
Exhiber une inégalité avec un produit scalaire ou une norme . . . . .	204
Comment exploiter l'orthogonalité de vecteurs? . . . . .	204
Simplifier le calcul d'une norme . . . . .	204
Trouver des coordonnées dans une base orthonormale . . . . .	205
Comment travailler avec les projections orthogonales? . . . . .	206

Prouver qu'un endomorphisme est une projection orthogonale . . . . .	206
Écrire la matrice d'une projection orthogonale . . . . .	206
Calculer la distance à un sous-espace . . . . .	207
À vous de jouer . . . . .	208
<b>Thème 9 – Valeurs propres et vecteurs propres . . . . .</b>	<b>211</b>
Comment déterminer des valeurs propres et des vecteurs propres ? . . . . .	211
Étudier un rang pour déterminer les valeurs propres . . . . .	211
Résoudre des systèmes linéaires . . . . .	211
Résoudre un système avec paramètre . . . . .	213
Reconnaître des cas particuliers favorables . . . . .	215
Exploiter les puissances d'une matrice ou d'un endomorphisme . . . . .	216
Comment étudier la diagonalisabilité d'un endomorphisme ou d'une matrice ? . . . . .	216
Déterminer si un endomorphisme ou une matrice est diagonalisable . . . . .	216
Déterminer une base de vecteurs propres et considérer la matrice de passage . . . . .	217
Reconnaître le cas d'une matrice symétrique réelle . . . . .	218
Comment exploiter la diagonalisation ? . . . . .	219
Calculer des puissances de matrices . . . . .	219
À vous de jouer . . . . .	220
<b>Thème 10 – Généralités sur les probabilités . . . . .</b>	<b>224</b>
Comment mettre en place le bon cadre de travail ? . . . . .	224
Reconnaître une éventuelle équiprobabilité . . . . .	224
Construire « la bonne » probabilité . . . . .	224
Repérer l'indépendance entre expériences . . . . .	225
Comment travailler avec l'équiprobabilité ? . . . . .	227
Exploiter les configurations usuelles de dénombrement . . . . .	227
Comment calculer une probabilité ? . . . . .	228
Décomposer l'événement par disjonction de cas . . . . .	228
Décomposer l'événement en une succession d'étapes . . . . .	229
Étudier l'événement contraire . . . . .	230
Introduire un système complet d'événements . . . . .	231
Lier cause et conséquence . . . . .	232
À vous de jouer . . . . .	233
<b>Thème 11 – Variables aléatoires réelles . . . . .</b>	<b>236</b>
Comment étudier la loi d'une variable aléatoire ? . . . . .	236
Déterminer l'image de l'univers . . . . .	236
Calculer la loi d'une variable aléatoire discrète . . . . .	236
Comment étudier la loi d'une variable aléatoire réelle non discrète ? . . . . .	236
Vérifier si une fonction est une éventuelle densité . . . . .	236
Déterminer si une fonction correspond à la fonction de répartition d'une variable à densité . . . . .	237
Déterminer si une variable aléatoire continue est une variable à densité . . . . .	238
Comment déterminer ou exploiter les paramètres de position et de dispersion ? . . . . .	239
Calculer l'espérance ou la variance d'une variable aléatoire en utilisant la définition . . . . .	239
Utiliser le théorème de transfert . . . . .	240
Exploiter l'espérance ou la variance d'une variable aléatoire . . . . .	241
Comment exploiter une situation usuelle ? . . . . .	242
Reconnaître une loi usuelle . . . . .	242
Exploiter une variable auxiliaire de loi usuelle . . . . .	243
À vous de jouer . . . . .	244
<b>Thème 12 – Indépendance et couples . . . . .</b>	<b>248</b>
Comment étudier l'indépendance de variables aléatoires ? . . . . .	248
Invoquer les propriétés de l'expérience . . . . .	248
Utiliser des « coalitions » . . . . .	248
Vérifier la définition . . . . .	249
Comment exploiter l'indépendance de variables aléatoires réelles ? . . . . .	250
Calculer une probabilité . . . . .	250
Obtenir des relations pour l'espérance et la variance . . . . .	251

Comment considérer la loi d'un couple de variables aléatoires réelles discrètes? . . . . .	251
Déterminer la loi du couple à l'aide des lois marginales . . . . .	251
Déterminer les lois marginales à l'aide de la loi du couple . . . . .	252
Comment étudier une fonction de variables aléatoires? . . . . .	253
Utiliser le théorème de transfert pour un couple discret . . . . .	253
Considérer le maximum ou le minimum d'une famille de variables indépendantes . . . . .	255
Faire la somme de variables aléatoires . . . . .	256
À vous de jouer . . . . .	259
<b>Thème 13 – Théorèmes limites et statistiques inférentielles . . . . .</b>	<b>263</b>
Comment étudier une série statistique numérique? . . . . .	263
Calculer les indicateurs de la série . . . . .	263
Calculer un intervalle de confiance pour $\bar{X}_n$ (pour $n \geq 30$ ) . . . . .	264
Comment étudier deux séries statistiques numériques? . . . . .	264
Imaginer une relation entre deux séries . . . . .	264
Trouver une relation linéaire . . . . .	266
Trouver une relation non linéaire . . . . .	267
Comment tester la pertinence d'une moyenne empirique? . . . . .	267
Comparer deux moyennes . . . . .	267
À vous de jouer . . . . .	269
<b>CORRIGÉS DES EXERCICES . . . . .</b>	<b>273</b>