Chapitre 1.
Divisibilité et nombres premiers

1. Comment utiliser les critères de divisibilité ?

Méthode

Un entier est divisible par **2** si son chiffre des unités est pair (comme 14, 106, 246).
Un entier est divisible par **3** si la somme de ses chiffres l'est (comme 27, 312, 846).
Un entier est divisible par **4** si le nombre constitué des deux derniers chiffres l'est (comme 516, 624, 1436, 500, 828).
Un entier est divisible par **5** si son chiffre des unités est 0 et ou 5 (comme 220, 645).
Un entier est divisible par **6** s'il est à la fois divisible par 2 et par 3 (comme 36, 510).
Un entier est divisible par **9** si la somme de ses chiffres l'est (comme 126, 387, 522).
Un entier est divisible par **10** si son dernier chiffre est 0 (comme 70, 100 ou 25340).

EXERCICE-TEST

Exercice-Test (force 1)

ET1. *Parmi la liste des nombres suivants, repérer ceux qui sont divisibles par 2, 3, 4, 5, 6, 9 ou 10 (compléter le tableau en suivant le modèle de la 1re ligne).*

↗ est divisible par	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*9*	*10*
324	***oui***	***oui***	***oui***		***oui***	***oui***	
200							
1200							
414							
12							
45							

2. Comment savoir si un entier est premier ?

Coach : Les nombres premiers sont au cœur de la recherche scientifique. Si tu découvres un algorithme (rapide) permettant d'en découvrir de nouveaux, tu risques de devenir riche, très riche (car ils sont utilisés en cryptographie, la science du codage !).

Méthode

Un entier est premier s'il n'admet pas d'autres diviseurs que 1 et lui-même.
Si le nombre est grand, un théorème d'Eratosthène nous dit la chose suivante :
Théorème : si aucun des entiers compris entre 2 et $\sqrt{n}$ ne divise n, alors n est premier.

Exemples (force 1)

Ex. 1. *Montrer que 5 est premier.*

Coach : Comme le nombre est petit, on peut regarder tous les cas (entre 1 et 5)

1 divise 5, 2 ne divise pas 5, 3 ne divise pas 5, 4 ne divise pas 5, et 5 divise 5.
Les seuls diviseurs de 5 sont 1 et 5, par conséquent 5 est premier.

Ex. 2. *Montrer que 113 est premier.*

Coach : Cette fois, le nombre est grand. Eratosthène va nous simplifier la vie : plutôt que de tester tous les diviseurs entre 1 et 113, on va tester uniquement ceux compris entre 2 et $\sqrt{113}$. Merci, Eratosthène !

On a $\sqrt{113} \simeq 10,6$, donc on va tester si les nombres compris entre 2 et 10 divisent 113. 2 ne divise pas 113 (car 113 n'est pas pair), 3 ne divise pas 113 (car la somme de ses chiffres n'est pas divisible par 3), 4 ne divise pas 113 (sinon 2 le diviserait), 5 ne divise pas 113 (car 113 ne finit pas par 0 ni par 5), 6 ne divise pas 113 (sinon 2 le diviserait aussi), 7 ne divise pas 113 (car $\frac{113}{7} \simeq 16,1$), 8 ne divise pas 113 (sinon 2 le diviserait aussi), 9 ne divise pas 113 (sinon 3 le diviserait aussi), 10 ne divise pas 113 (car 113 ne finit pas par 0). Conclusion : 113 est premier.

EXERCICES-TESTS

Exercices-Tests (force 1)

ET1. *Montrer que 7 est premier.*

ET2. *Montrer que 151 est premier.*

3. Comment décomposer un entier en produit de facteurs premiers ?

Méthode

Tout entier n strictement supérieur à 1, se décompose de manière unique (à l'ordre près) sous la forme $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$ où p_1, p_2, …p_m sont des nombres premiers vérifiant $p_1 < p_2 < \ldots < p_m$ et α_1, α_2,… α_m sont des entiers strictement positifs.

Exemple (force 1)

Ex. 1. *Décomposer en produit de facteur premiers le nombre 29400.*

Coach : Divise tant que tu peux par 2, puis par 3, puis par 5, puis par 7, etc. (c'est-à-dire par les nombres premiers en ordre croissant).

$29400 = 2 \times 14700 = 2^2 \times 7450 = 2^3 \times 3675 = 2^3 \times 3 \times 1225 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 245 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 49$
$= 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 7 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7^2$.

Conclusion : 29400 a pour décomposition en facteurs premiers $2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7^2$.

EXERCICE-TEST

Exercice-Test (force 1)

ET1. *Décomposer en produit de facteurs premiers le nombre*
a) 900 b) 504 c) 27440 d) 1125 e) 970200.

Chapitre 2.
Fractions

1. Comment simplifier une fraction numérique ?

Coach : Les bases, on commence par les bases, ok ?

Méthode

On simplifie petit à petit sachant qu'on peut diviser
- par 2 lorsque le nombre est pair.
- par 10 lorsque le nombre se finit par 0.
- par 3 lorsque la somme des chiffres est divisible par 3.
- par 5 lorsque le nombre se finit par 0 ou par 5.

Exemple (force 1)

Ex. 1. *Simplifier* $\frac{270}{60}$. On a : $\frac{270}{60}=\frac{27\times 10}{6\times 10}=\frac{27}{6}=\frac{3\times 9}{3\times 2}=\frac{9}{2}$.

EXERCICE-TEST

Exercice-Test (force 1)

ET1. *Simplifier la fraction :* *a)* $\frac{240}{16}$ *b)* $\frac{500}{140}$ *c)* $\frac{1500}{90000}$.

2. Comment simplifier du calcul fractionnaire ?

Méthode

On applique les règles sur les fractions suivantes :

1) $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$ 2) $\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}$ 3) $\frac{a}{\frac{b}{c}}=a\times\frac{c}{b}=\frac{a\times c}{b}$ 4) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}$

Exemples (force 1)

Ex. 1. *Simplifier* $\frac{2}{3}\times\frac{5}{12}$.

Coach : Applique la règle $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$!

On a : $\frac{2}{3}\times\frac{5}{12}=\frac{2\times 5}{3\times 12}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$.

Ex. 2. *Simplifier* $\frac{1}{\frac{5}{6}}$.

Coach : Applique la règle $\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a}$!

On a : $\frac{1}{\frac{5}{6}}=\frac{6}{5}$.

Ex. 3. *Simplifier* $\frac{3}{\frac{2}{5}}$.

Coach : Applique la règle $\frac{a}{\frac{b}{c}}=a\times\frac{c}{b}=\frac{a\times c}{b}$!

On a : $\frac{3}{\frac{2}{5}}=3\times\frac{5}{2}=\frac{3\times 5}{2}=\frac{15}{2}$.

Ex. 4. *Simplifier* $\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}}$.

Coach : Applique la règle $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{a \times d}{b \times c}$!

$$\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{6} \times \frac{3}{2} = \frac{5 \times 3}{6 \times 2} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}.$$

EXERCICE-TEST

Exercice-Test (force 1)

ET1. *Simplifier a)* $\dfrac{3}{8} \times \dfrac{5}{6}$ *b)* $\dfrac{\frac{1}{2}}{3}$ *c)* $\dfrac{7}{\frac{2}{3}}$ *d)* $\dfrac{\frac{7}{4}}{\frac{1}{5}}$.

3. Comment mettre deux fractions au même dénominateur ?

Coach : C'est très facile, mais tu l'as peut être oublié ! Regarde !

Méthode

On applique les astuces suivantes :

1) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times d}{b \times d} + \dfrac{c \times b}{d \times b}$ 2) $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \times d}{b \times d} - \dfrac{c \times b}{d \times b}$

Exemples (force 1)

Ex. 1. *Montrer que :* $\dfrac{2}{3} + \dfrac{7}{4} = \dfrac{29}{12}$

On a : $\frac{2}{3}+\frac{7}{4}=\frac{2\times 4}{3\times 4}+\frac{7\times 3}{4\times 3}=\frac{8}{12}+\frac{21}{12}=\frac{29}{12}$.

Ex. 2. *Montrer que :* $\frac{7}{6}-\frac{2}{5}=\frac{23}{30}$

On a : $\frac{7}{6}-\frac{2}{5}=\frac{7\times 5}{6\times 5}-\frac{2\times 6}{5\times 6}=\frac{35}{30}-\frac{12}{30}=\frac{35-12}{30}=\frac{23}{30}$.

Ex. 3. *Montrer que* $3+\frac{2}{5}=\frac{17}{5}$.

On a : $3+\frac{2}{5}=\frac{3}{1}+\frac{2}{5}=\frac{3\times 5}{1\times 5}+\frac{2}{5}=\frac{15}{5}+\frac{2}{5}=\frac{17}{5}$.

EXERCICE-TEST

Exercice-Test (force 1)

ET1. *Montrer que a)* $\frac{11}{6}-\frac{3}{7}=\frac{59}{42}$ *b)* $4+\frac{3}{7}=\frac{31}{7}$ *c)* $\frac{5}{3}+\frac{1}{4}=\frac{23}{12}$.