Chapitre 1

METHODES DU SECOND DEGRE

Un tout petit peu d'histoire des maths pour commencer : les premières traces (écrites) d'activité mathématique furent trouvées dans une zone bien connue des historiens : la zone du croissant fertile. Cette région du monde (allant de l'actuel Irak jusqu'en Egypte) fut dominée par deux civilisations extrêmement brillantes (qui possèdent leur quartier au Louvre et dans d'autres musées du monde) : la civilisation mésopotamienne (et babylonienne) et la civilisation égyptienne. Toutes deux bénéficiant de la présence de fleuves (le Tigre, L'Euphrate, le Nil) donc de terres très fertiles (grâce aux alluvions déposés par les fleuves), ils inventèrent l'agriculture, 1000 fois plus productive que la simple chasse. Chaque récolte étant soumise à l'impôt, pour les calculer, ils inventèrent les équations du 1er degré (que vous avez déjà vues au collège et en seconde, ce sont des équations du type $2x-3=0$, $5x+3=2$, etc.). A chaque crue et décrue, les terrains cultivables changent de forme, il faut donc recalculer leur superficie : pour y parvenir, ces civilisations inventèrent les équations du second degré (ce sont des équations du type $5x^2-6x+3=0$).

Ce sont ces équations-là (c'est-à-dire de la forme $ax^2+bx+c=0$) qu'on étudie en 1re. L'objet de ce chapitre est de vous donner l'intégralité des méthodes permettant l'étude des problèmes relatifs au 2nd degré : résolution d'équations, tracé graphique des paraboles, propriétés des solutions ou des racines, tableaux de signes, inéquations, factorisations, problèmes ou situations menant au 2nd degré... Vous êtes prêt ? Alors allons-y !

1. Courbe et variations d'une fonction trinôme du second degré

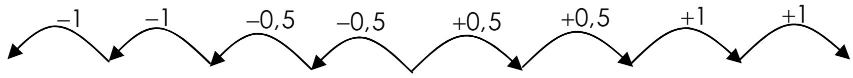
A- Comment tracer la courbe d'une fonction trinôme du second degré ?

La courbe de la fonction trinôme du second degré $x \to ax^2+bx+c$ est une parabole. Cette parabole a pour sommet le point d'abscisse $\frac{-b}{2a}$. Selon le signe de a, elle est dans le bon ou dans le mauvais sens (si elle est dans le mauvais, on dit qu'elle est inversée). Ce qui nous donne la méthode suivante.

METHODE 1 : En utilisant l'équation $y = ax^2 + bx + c$

■ Principe

1) Calculer $\frac{-b}{2a}$ puis la placer comme valeur centrale du tableau de valeurs (c'est logique vu que c'est l'abscisse du sommet).
2) "Mettre" $+0,5$ et $-0,5$, (ou $+0,25$ et $-0,25$) (deux fois) autour du sommet pour affiner le tracé puis aller de 1 en 1, comme ci-dessous (en essayant de tomber sur des valeurs "pratiques") :



x					$\frac{-b}{2a}$				
$f(x)$									

3) Calculer chacune des images (dans la deuxième ligne du tableau) : avec la calculatrice et la fonction table, c'est fait en deux secondes !

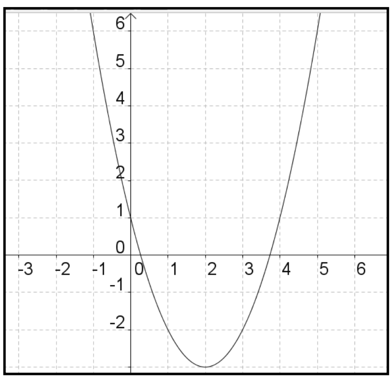
■ **Exemple :** *Soit* f *la fonction trinôme du 2nd degré définie par :* $f(x) = x^2 - 4x + 1$. *Tracer* C_f *dans un repère orthonormé* $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 1 \end{cases} \text{ d'où } \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2 \text{ (c nous est inutile)}$$

On construit alors le tableau de valeurs, centré en **2** (utiliser la fonction table de votre calculatrice avec *tblstart:* -1 et $\Delta tbl = 0,5$).

x	-1	0	1	1,5	**2**	2,5	3	4	5
$f(x)$	6	1	-2	$-2,75$	-3	$-2,75$	-2	1	6

Puis la courbe C_f :



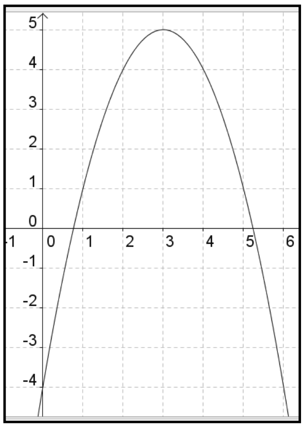
■ **Exemple :** *Soit* f *la fonction par :* $f(x) = -x^2 + 6x - 4$. *Tracer* C_f *dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i},\vec{j})$.

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 6 \\ c = -4 \end{cases} \text{ d'où } \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2\cdot(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3 .$$

On construit alors le tableau de valeurs, centré en **3** (utiliser la fonction table de votre calculatrice avec *tblstart:* 0 et $\Delta tbl = 0{,}5$).

x	0	1	2	2,5	**3**	3,5	4	5	6
f(x)	−4	1	4	4,75	5	4,75	4	1	−4

Puis la courbe C_f :



METHODE 2 : En utilisant la forme canonique $\mathbf{y = a(x - \alpha)^2 + \beta}$

■ Principe

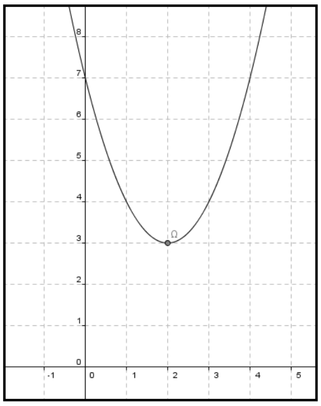
C'est tout l'avantage de la mise sous forme canonique, si on arrive à mettre $f(x) = ax^2 + bx + c$ sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, on y gagne vraiment.

En effet (et ça vous l'avez déjà vu en 2nde), voici ce qu'il faut retenir :

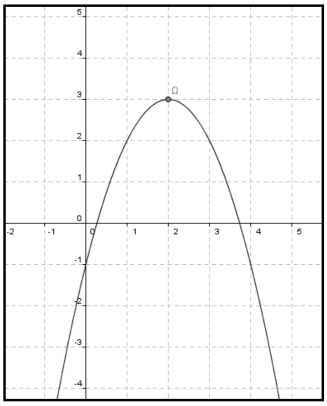
La courbe $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$ est une parabole de sommet $\Omega\begin{pmatrix}\alpha \\ \beta\end{pmatrix}$.

a) Si $a > 0$ alors la parabole est dans le bon sens et β est un minimum.

b) Si $a < 0$ alors la parabole est dans le mauvais sens et β est un maximum.



$a > 0$



$a < 0$

Pour construire la courbe, on centre son tableau de valeurs en α, tout simplement, puis on procède comme dans la méthode 1.

-1 $\quad -1$ $\quad -0{,}5$ $\quad -0{,}5$ $\quad +0{,}5$ $\quad +0{,}5$ $\quad +1$ $\quad +1$

x					α				
$f(x)$					β				

■ **Exemple (forme adaptée) :** *Soit* f *la fonction polynôme du 2nd degré définie par :* $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

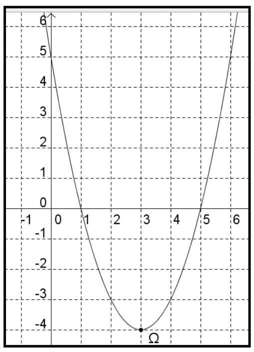
a) Montrer que $f(x) = (x-3)^2 - 4$.

b) En déduire le tableau de valeurs de f *puis tracer* C_f *dans un repère orthonormé* $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a) On développe ce qui est proposé, à savoir $(x-3)^2 - 4$.
$(x-3)^2 - 4 = x^2 - 6x + 9 - 4 = x^2 - 6x + 5 = f(x)$. *On a donc bien* $f(x) = (x-3)^2 - 4$.

b) La courbe a pour équation $y = (x-3)^2 - 4$ c'est-à-dire une équation de la forme $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec :

$a = 1$ (donc ce sera une parabole dans le bon sens).
$\alpha = 3$. On va donc centrer le tableau de valeurs en 3.
$\beta = -4$. Ce qui nous donnera pour minimum -4.
(C'est un minimum parce que la parabole est dans le bon sens !).
On obtient le tableau de valeurs (à la calculatrice) puis C_f.



x	0	1	2	2,5	**3**	3,5	4	5	6
$f(x)$	5	0	-3	$-3{,}75$	-4	$-3{,}75$	-3	0	5

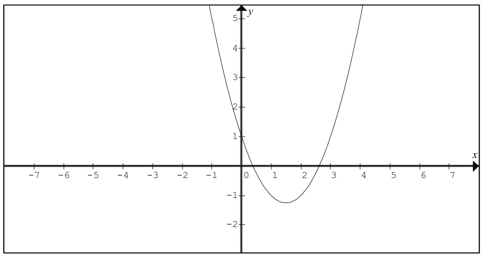
REMARQUE : Dans Method's Seconde, il y a une activité $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$ qui permet de visualiser la parabole lorsqu'on fait varier a, α et β.

B- Comment obtenir le tableau de variations d'une fonction trinôme du second degré ?

METHODE 3 : En utilisant l'équation $y = ax^2 + bx + c$, $\frac{-b}{2a}$, et le signe de a

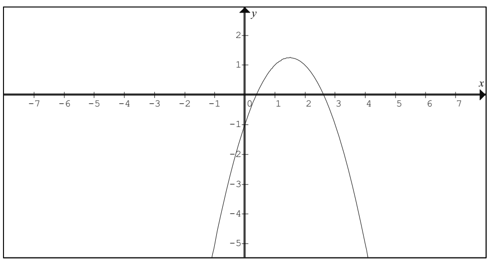
■ Principe

Deux cas (correspondant à deux paraboles) peuvent se produire, selon le signe de a :
a) Décroissant-croissant (parabole dans le "bon sens") si $a > 0$.



x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	$\searrow$		$\nearrow$

b) Croissant-décroissant (parabole "inversée") si $a < 0$.



x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	$\nearrow$		$\searrow$

REMARQUE : On voit bien que dans les 2 cas le sommet a pour abscisse $\frac{-b}{2a}$.

■ **Exemple :** *Déterminer le sens de variation de la fonction trinôme* $f : x \to f(x) = 2x^2 - 3x + 4$. *En déduire son minimum.*

$a = 2$ donc $a > 0$. $\frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$ ce qui donne le tableau de variations :

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$2x^2 - 3x + 4$		$\searrow$	$\frac{23}{8}$	$\nearrow$	

car $2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{4} + 4 = \frac{23}{8}$.
Le tableau de variations nous indique que le minimum de la fonction $f : x \to f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ vaut $\frac{23}{8}$, c'est-à-dire : pour tout x, $2x^2 - 3x + 4 \geq \frac{23}{8}$.

■ **Exemple :** *Déterminer le sens de variation de la fonction trinôme* $g : x \to g(x) = -x^2 + 4x - 3$. *En déduire son maximum.*

$a = -1$ donc $a < 0$. $\frac{-b}{2a} = \frac{-(4)}{2 \cdot (-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$ ce qui donne le tableau de variations :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$-x^2 + 4x - 3$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

car $-2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = -4 + 8 - 3 = 1$.
Le tableau de variations nous indique que le maximum de la fonction $g : x \to g(x) = -x^2 + 4x - 3$ vaut 1, c'est-à-dire : pour tout x, $-x^2 + 4x - 3 \leq 1$.

METHODE 4 : En utilisant la forme canonique $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$

■ **Principe**

Soit $f : x \to f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ une fonction trinôme du 2nd degré :
a) Si $a > 0$ alors on a le tableau de variations (parabole dans le bon sens) :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$a(x - \alpha)^2 + \beta$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Il y a alors un minimum qui vaut β.

b) Si $a < 0$, alors on a le tableau de variations (parabole inversée) :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$a(x-\alpha)^2+\beta$	$\nearrow$	β	$\searrow$

Il y a alors un maximum qui vaut β.

On vous renvoie au Method's Seconde (où il y a un sacré paquet d'exemples, vu que c'est au programme de 2de), mais juste pour la forme on vous en met quand même un (et ça c'est parce qu'on vous aime bien !).

■ **Exemple :** *Soit* f *la fonction trinôme du* 2nd *degré définie par :* $f(x)=(x-2)^2+3$. *Donner le tableau de variations de* f *puis en déduire son minimum.*

La fonction est $f : x \to f(x)=(x-2)^2+3$, c'est une fonction trinôme du second degré de la forme $f : x \to f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec : $\begin{cases} a=1 \\ \alpha=2 \\ \beta=3 \end{cases}$

Comme $a=1$, ce sera une parabole dans le bon sens. On obtient donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x \to (x-2)^2+3$	$\searrow$	3	$\nearrow$

Le minimum de la fonction vaut 3, c'est-à-dire : pour tout x, $(x-2)^2+3 \geq 3$ (ce qui est assez évident, vu que le carré $(x-2)^2$ est toujours positif…).

2. Résolution de l'équation du 2nd degré $ax^2+bx+c=0$

Il faut savoir qu'on dit indifféremment : solution de l'équation $ax^2+bx+c=0$, comme : racine du trinôme ax^2+bx+c (racine n'a rien à voir avec racine carrée !). Par exemple on peut dire que 2 est solution de l'équation $x^2-5x+6=0$ mais on peut aussi bien dire que 2 est racine du trinôme x^2-5x+6 (car $2^2-5\cdot 2+6=0$). Ok ?

METHODE 5 : Utiliser la mise sous forme canonique

On peut tout à fait résoudre une équation du 2nd degré à partir de la forme canonique (historiquement c'est même cette méthode qui est apparue la première : c'est la méthode des babyloniens remontant à plus de 4000 ans qu'ensuite le mathématicien perse Al Khwarizmi [783-850] a reprise) : voici un exemple pour vous montrer comment faire mais il faut savoir que c'est plus long et plus difficile que d'appliquer directement la méthode 6 (méthode du discriminant) !

■ Principe

ax^2+bx+c peut se mettre sous forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$ (une indication est alors donnée). Une fois qu'on a la forme canonique, la résolution est plus simple (et rigoureusement équivalente !).

■ **Exemple : Equation historique d'Al Khwarizmi (783-850)** : *On souhaite résoudre l'équation du 2nd degré :* $x^2+10x-39=0$.

a) Montrer que $x^2+10x-39=(x+5)^2-64$.

b) En déduire les solutions de l'équation $x^2+10x-39=0$.

a) On développe ce qui est proposé :

$(x+5)^2-64=x^2+10x+25-64=x^2+10x-39$. Gagné !

b) On a :

$$x^2+10x-39=0 \Leftrightarrow (x+5)^2-64=0 \Leftrightarrow (x+5)^2=64 \Leftrightarrow \begin{cases} x+5=\sqrt{64} \\ x+5=-\sqrt{64} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5=8 \\ x+5=-8 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-13 \end{cases}$. Conclusion : $S=\{3,-13\}$.

REMARQUES : a) C'est vraiment comme cela qu'a procédé Al Khwarizmi pour résoudre cette équation. Le nom d'Al Khwarizmi donnera une fois latinisé le mot Algorithme. Son œuvre maîtresse dans laquelle apparaît le mot Al djabr donnera une fois latinisé le mot Algèbre (que tout le monde connaît). Tout élève de 1re se doit de connaître Al Khwarizmi (sinon c'est la honte…).

b) Comme vous pouvez le voir c'est une méthode un peu longue voire un peu risquée car il ne faut pas se tromper dans les nombreuses étapes qui mènent au résultat. On peut apprécier alors la méthode 6, utilisant le discriminant, bien plus expéditive (c'est d'ailleurs la méthode 6 qu'il faut utiliser prioritairement), la voici :

METHODE 6 : Utiliser le discriminant

S'il y a donc quelque chose à connaître par cœur, aussi bien qu'une comptine d'enfant, ce sont les formules qui vont suivre !

■ Principe

Soit $ax^2+bx+c=0$ une équation du 2nd degré. Soit $\Delta=b^2-4ac$ (Δ se prononce Delta) le discriminant du trinôme ax^2+bx+c.