

TABLE DES MATIÈRES

I. Généralités sur les groupes, groupes finis, groupe symétrique.	9
0. Rappels	9
1. Générateurs d'un groupe	10
2. Sous-groupes distingués	11
3. Centre et commutateurs	12
4. Opération d'un groupe sur un ensemble	13
5. Les théorèmes de Sylow	18
6. Produits directs et semi-directs	20
7. Automorphismes de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$	24
8. Structure de \mathfrak{S}_n et \mathfrak{A}_n	28
Exercices sur le chapitre I	34
II. Anneaux, propriétés arithmétiques	41
0. Rappels	41
1. Quelques remarques sur les idéaux	42
2. Anneaux noethériens	44
3. Propriétés arithmétiques	45
a) éléments inversibles	45
b) divisibilité	46
c) anneaux factoriels	47
d) ppcm et pgcd	49
e) le théorème de Bézout	49
f) anneaux euclidiens	50
4. Stabilité des notions étudiées	50
a) passage à l'anneau de polynômes	50
b) passage au quotient	53
5. Un exemple d'anneau principal non euclidien	53
6. $\mathbf{Z}[i]$ et le théorème des deux carrés	56
Exercices sur le Chapitre II	59
III. Corps, théorie élémentaire	65
1. Les techniques vectorielles	65
a) degré d'une extension, éléments algébriques	65
b) application : constructions à la règle et au compas	68

c) corps de rupture, corps de décomposition	70
2. Les corps finis	72
a) caractéristique et cardinal	72
b) existence et unicité des corps finis	73
c) étude du groupe multiplicatif \mathbf{F}_q^*	73
d) les carrés de \mathbf{F}_q	74
3. Irréductibilité des polynômes de $k[X]$	76
4. Cyclotomie	80
a) racines de l'unité, racines primitives	80
b) étude de Φ_n	80
c) application : le théorème de Wedderburn	82
d) l'irréductibilité de Φ_n sur \mathbf{Z}	82
e) comportement de Φ_n sur \mathbf{F}_p	84
Exercices sur le Chapitre III	86
IV. Le groupe linéaire	95
1. Déterminant et groupe $SL(E)$	95
2. Générateurs et centres de $GL(E)$ et $SL(E)$	96
a) les dilatations	96
b) les transvections	96
c) application, calcul des centres	98
d) générateurs de $SL(E)$ et $GL(E)$	99
e) conjugaison	100
3. Commutateurs	101
4. La simplicité de $PSL(n, k)$	102
5. Le cas des corps finis	105
Exercices sur le Chapitre IV	108
V. Formes sesquilinéaires, généralités	117
1. Définitions	117
2. Formes réflexives	118
3. Sous-espaces orthogonaux et isotropes	122
4. Groupes unitaire, orthogonal, symplectique	123
5. Les similitudes	126
6. Bases orthogonales ; classification des formes sesquilinéaires	127
7. Caractérisation des similitudes	131
Exercices sur le Chapitre V	133
VI. Le groupe orthogonal euclidien	141
1. Notations et rappels	141
2. Générateurs et centres de $O(q)$ et $O^+(q)$	142
3. Conjugaison et commutateurs	144
4. La dimension 2 et les angles	145
5. Structure des éléments de $O(q)$	147
6. La simplicité du groupe $O^+(3, \mathbf{R})$	148
7. La simplicité de $PO^+(n, \mathbf{R})$ pour $n \geq 5$	150
8. Les automorphismes de $O^+(3, \mathbf{R})$	152
Exercices sur le Chapitre VI	154

VII. Quaternions	161
1. Définition du corps \mathbf{H}	161
2. Opérations de \mathbf{H} sur \mathbf{R}^3	163
3. La structure de $O^+(4, \mathbf{R})$	165
4. Quelques compléments sur \mathbf{H}	167
5. Les quaternions généralisés	169
Exercices sur le Chapitre VII	173
VIII. Le groupe orthogonal, cas général	179
1. Introduction	179
2. Plans hyperboliques	179
3. Espaces hyperboliques	181
4. Le théorème de Witt	183
5. Générateurs et centres de $O(q)$ et $O^+(q)$	186
6. La dimension 2	188
7. Le théorème de Cartan-Dieudonné	190
8. Le groupe des commutateurs	192
9. Compléments	194
Exercices sur le Chapitre VIII	196
Bibliographie	203
Index terminologique	205