Partie I

OUTILS DE BASE : REVISIONS

Ça y est, c'est les vacances ! Votre classe de Première est maintenant derrière vous, ainsi que les épreuves anticipées du baccalauréat.

C'est maintenant l'heure de se détendre à fond car « c'est les vacances » ! Sauf que vous êtes un garçon (ou une jeune fille) prévoyant(e) et que vous avez décidé, dans une atmosphère détendue de vacances de vous préparer en douceur mais efficacement aux maths de Terminale, bref aux trucs horribles, aux coups fourrés odieux, aux pièges à ours infâmes que vous réserve ce bon petit programme de TS. On dit souvent qu'un homme prévenu en vaut deux, ajoutez-y un bon petit cahier de vacances Method's et cet homme ne devient pas deux mais un bataillon entier de légionnaires romains assoiffés de conquêtes et de victoires (sur les maths bien entendu).

Pour commencer, des petites révisions : les « incontournables » que vous aurez la joie de revoir en Terminale : Fonctions (généralités), Suites, Trigo, Calcul vectoriel (avec les barycentres et le produit scalaire) et Probas. Nous avons fait figurer déjà des exercices **type bac** (des QCM ou des vrais exos) car oui, une quantité non négligeable d'entre eux peuvent être **résolus** avec les seuls **outils de Première** ! (Vous avez du mal à le croire, et pourtant nous allons le voir !)

Après cette petite mise en jambes, nous aurons la joie de nous revoir pour la partie II, partie où les choses nouvelles commencent, afin que le fougueux légionnaire romain devienne en plus un savant sage de haute volée (l'association des deux devrait être productive !)

Cependant rien ne vous empêche de sortir votre panoplie complète de « Patrick Chirac », (avec le T-Shirt sans manches « dog hot dog » et le fameux slip de bain bleu) car n'oubliez pas, nous sommes tout de même en vacances (et pas dans une salle de classe sinistre qui a cette odeur si particulière des rentrées des classes), après tout, des tongs aux sandales romaines il n'y a qu'un pas…

1 LES FONCTIONS

LES METHODES DE PREMIERE qu'il faut avoir en tête :

- ❑ Méthodes sur les ensembles de définition
- ❑ Méthodes sur les limites et les asymptotes
- ❑ Méthodes sur la parité
- ❑ Méthodes sur les dérivées et les tableaux de variation.

En bref :

- ❑ Méthodes d'étude complète et systématique d'une fonction.

▶ Cf. *Méthod'S Première*, chapitre 7 (et chapitre 1, 4, 5, 6) pour le détail de ces méthodes.

VRAI OU FAUX ?

	VRAI	FAUX
1. $f : x \to f(x) = \sqrt{1-2x}$ admet pour ensemble de définition $D_f = \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.		
2. $g : x \to g(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$ admet pour ensemble de définition $D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.		
3. $f : x \to f(x) = x^2 + 2x^4 + 3x^6$ est paire, $g : x \to g(x) = x^3 + 5x^5 + 18x^7$ est impaire.		
4. La fonction $f : x \to f(x) = x^2 - 3x + 5$ n'est ni paire ni impaire.		
5. Si l'on a $f : x \to f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2$ alors $g \circ f(x) = 2x^2 + 1$.		
6. $f : x \to f(x) = x^2 + 3x + 6$ admet pour dérivée $f' : x \to f'(x) = 2x + 3$ sur $\mathbb{R}$.		
7. La fonction $f : x \to f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.		
8. $f : x \to f(x) = \sqrt{2x-3}$ admet pour dérivée $f' : x \to f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$ sur $\left]\frac{3}{2};+\infty\right[$.		
9. $f : x \to f(x) = \frac{2x+3}{3x-5}$ admet pour dérivée $f' : x \to f'(x) = \frac{-19}{(3x-5)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}$.		
10. $g : x \to g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ admet pour dérivée $h' : x \to h'(x) = \frac{-2}{(x-1)^3}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.		
11. La courbe de $a : x \to a(x) = x^2 + 3$ (resp. de $b : x \to b(x) = (x+3)^2$) se déduit de celle de $g(x) = x^2$ par la translation $t_{3\vec{j}}$ (resp. par $t_{3\vec{i}}$).		

12. Lorsque pour tout x, $f(x)-g(x)>0$, la courbe C_f se trouve au-dessus de celle de C_g.

13. On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^2-4x+5}{6x^2-7x+4}=0,5$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x^3+7x-5}{2x^2-5x+1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{7x-5}{2x^2+7}=\frac{7}{2}$

14. On a : $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{1}{x-3}=+\infty$ et donc $(\Delta): x=3$ est asymptote verticale à C_f.

15. La droite $(d): y=2x-1$ est asymptote oblique à C_f où f est la fonction définie par $f(x)=\frac{2x^2-3x+2}{x-1}$.

16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-5}{-x+2}=-3$ et la droite $(d): y=-3$ est asymptote horizontale à C_f.

17. Les fonctions cosinus et sinus sont 2π – périodiques.

18. Les fonctions $x\to\cos(2x)$ et $x\to\sin(2x)$ sont π – périodiques.

19. Si $f(x)=\cos(x)$ alors $f'(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

20 (bac). Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $]a;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

21 (bac). Soient f et g deux fonctions définies sur $[0;+\infty[$, g ne s'annulant pas. Si $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=-1$.

22 (bac). Si f est une fonction définie sur $[0;+\infty[$ telle que $0\le f(x)\le\sqrt{x}$ sur $[0;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

23 (bac). On considère un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan. Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$, alors la droite d'équation $x=0$ est asymptote à la courbe représentative de f dans le repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

EXERCICES

❐ Exercice 1

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes (ainsi que leur ensemble de dérivation : I)

a) $f : x \to \dfrac{2x-1}{x-3}$ b) $g : x \to \dfrac{-x+6}{x-2}$

c) $h : x \to \dfrac{1}{2x-1}$ d) $i : x \to \sqrt{2x+1}$

e) $j : x \to \sqrt{-2x+3}$ f) $k : x \to \sin(2x)$

g) $l : x \to \sin(3x)$ h) $m : x \to \tan(x)$

i) $n : x \to \dfrac{1}{\sqrt{3x-5}}$ j) $o : x \to 3x^5 + 4x^3 + 5x$

❐ Exercice 2

Effectuer l'étude complète (ensemble de définition, limites aux bornes et asymptotes éventuelles, parité, imparité, ensemble de dérivation, dérivée, tableau de variations) des fonctions suivantes :

a) $a : x \to a(x) = x^2 + 5x + 6$

b) $b : x \to b(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$

c) $c : x \to c(x) = x^3 - 3x$

❐ Exercice 3 (bac)

Soit g la fonction définie par

$$g : x \to g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)}.$$

Déterminer les réels a, b et c tels que l'on ait pour tout $x > 1$: $g(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x-1}$.

❐ Exercice 4 (bac)

Soit b un nombre réel strictement positif.

1. Exprimer en fonction de b un nombre A_1 tel que, pour tout nombre réel x strictement positif supérieur à A_1, on ait $\dfrac{1}{x} < b$.

2. Exprimer en fonction de b un nombre A_2 tel que, pour tout nombre réel x strictement positif supérieur à A_2, on ait $\dfrac{1}{2x+1} < b$.

3. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ telle que pour tout x de cet intervalle, on ait $\dfrac{-1}{2x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x}$.

a) Proposer un nombre réel A, à exprimer en fonction de b, tel que, pour tout nombre réel x positif supérieur ou égal à A, on ait $f(x) \in\ ]-b;b[$.

b) Quelle propriété de la fonction f est démontrée à la question a) ?

LES MATHEMATICIENS QUE L'ON ETUDIE AU LYCEE

EPISODE 1. AU PAYS DE NIKOS ALIAGAS

Il s'agit bien sûr de la Grèce, vous l'aviez deviné.

THALÈS (vers –585), ou l'histoire d'une star en Egypte

Notre cher Thalès va donc ouvrir le bal. C'est assez logique, puisqu'il s'agit du premier mathématicien connu de la grande histoire des mathématiques. Le théorème de Thalès est étudié dès le collège, et il paraît aussi simple que puissant. Pourtant il est loin d'être évident à démontrer. Thalès connut la gloire (plus que méritée) grâce à sa découverte puisqu'il parvint à calculer la hauteur de la pyramide de Kheops à l'aide d'un simple bâton et de ses observations sur les ombres (voir Method's Seconde pour en connaître l'explication). Inutile de vous préciser le bruit que cela a fait à l'époque, Thalès passant pour un magicien de génie, bruit tellement important qu'encore aujourd'hui tout élève a déjà entendu parler de ce fabuleux théorème.

PYTHAGORE (VIe siècle av. J.-C.), ou l'histoire du mathématicien gourou de secte

On aime dire que les mathématiques ont été développées par une secte, la secte montée par Pythagore lui-même. Cette secte ou plutôt organisation secrète n'était accessible qu'à ceux qui voyaient une interprétation mystique du monde, des nombres, des figures, des maths, un secret dans l'harmonie mathématique à ne divulguer sous aucun prétexte sous peine de briser ce serment fait à Pythagore. Pythagore, qui a démontré le premier le théorème (qui porte son nom) est certainement le mathématicien le plus connu au monde (peut-être à égalité avec Thalès, quoique...) et est aussi à l'origine de la gamme Pythagoricienne (gamme pour la musique) ; les Grecs de l'époque adorant briller dans tous les domaines : les arts, les sports et la connaissance.

EUCLIDE (vers –300), ou l'histoire de l'auteur du livre qui a connu le plus grand nombre d'éditions après la Bible

Et non, ce n'est pas Method's Première ni même Method's Seconde qui a la joie d'être le livre au plus grand nombre d'éditions et de rééditions (après la Bible) mais bien "les éléments d'Euclide" (enfin, qui sait, peut-être que cela changera un jour, complètement mégalo l'auteur... complètement…). Traduit dans des centaines de langues (en commençant par l'arabe et le perse, en passant par quasiment toutes les nationalités), cette œuvre constituée de plusieurs tomes rassemblant les principales connaissances de l'époque en Géométrie, Arithmétique est pourtant incomplète, tout cela à cause de l'incendie de la grande bibliothèque d'Alexandrie. Cependant les exemplaires qui nous sont parvenus ont servi pendant longtemps de livre de référence des mathématiques.
Quand on pense que le jeune Pascal (voir épisode 6) s'amusait, tout petit déjà, à redémontrer tout seul les principales propriétés d'Euclide, tout cela ne pouvait laisser présager que du bon.

JEUX DE LA PLAGE

Les sudokus (mode d'emploi)

Il s'agit d'un vrai jeu de logique (son ancêtre est le carré latin !). Les règles sont assez simples, et si vous ne les connaissez pas, nous allons vous les rappeler ! Regardez le Sudoku suivant !

3				5				2
	8	6				4	7	
	2		4	1	8		6	
6			8		9			7
9		2		4		6		8
	3	4				5	1	
		8				7		
	9						5	
	6		1	2	5		8	

Il y a neuf lignes, neuf colonnes, et neuf carrés. C'est simple : tous les entiers entre 1 et 9 doivent apparaître **une seule fois** sur :

- chacune des neuf lignes
- chacune des neuf colonnes
- chacun des neuf carrés.

Voici le Sudoku une fois résolu :

3	**4**	**1**	**6**	5	**7**	**8**	**9**	2
5	8	6	**3**	**9**	**2**	4	7	**1**
7	2	**9**	4	1	8	**3**	6	**5**
6	**1**	**5**	8	**3**	9	**2**	**4**	7
9	**7**	2	**5**	4	**1**	6	**3**	8
8	3	4	**2**	**7**	**6**	5	1	**9**
1	**5**	8	**9**	**6**	**3**	7	**2**	**4**
2	9	**3**	**7**	**8**	**4**	**1**	5	**6**
4	6	**7**	1	2	5	**7**	8	**3**

Vérifiez bien, les nombres de 1 à 9 apparaissent dans chacune des 9 lignes et chacune des 9 colonnes, chacun des 9 carrés, une seule fois.

Rassurez-vous, il n'est pas rare de passer parfois 20 minutes pour résoudre un Sudoku, après avoir raturé, changé d'avis, être revenu en arrière et douté du succès de sa recherche.

Pour aller vite, on peut faire appel aux astuces suivantes :

Astuce n°1

Repérer les lignes (ou les colonnes) comportant le plus de cases déjà remplies : ce sont les lignes les plus faciles, car il y a moins de nombres à trouver.

Astuce n°2

Ne pas hésiter à faire des hypothèses sur certaines cases (en utilisant un crayon à papier par exemple) quitte à les effacer et les écarter.

Allez, à vous maintenant :

8	6		2	7		1		
3		9	8		4	5	6	7
	4	1		5	6		8	
9		3		8	7	4	1	2
1	8	2			5			
					1	8		9
4	9	7		6	8	3		1
		8	7			6		5
			1		2			8