Chapitre 1

METHODES SUR LES SUITES GEOMETRIQUES ET ARITHMETICO-GEOMETRIQUES

En 1e ES/L, vous avez déjà étudié les suites géométriques, si merveilleusement régulières puisque pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par la même chose (la suite 1, 2, 4, 8, 16, 32, … suit une progression géométrique : on multiplie toujours par la même chose, ce quelque chose s'appelant la raison, qui dans ce cas vaut $q = 2$; la suite $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}$,... suit, elle, une progression géométrique mais de raison $q = \frac{1}{3}$.). Rappelons que certaines lois de la nature (le nombre de pétales d'une fleur, le nombre de branches d'un flocon, la radioactivité, la décomposition du carbone 14), et certains placements économiques (comme le placement à intérêts composés) ont des comportements qui suivent des progressions géométriques. Savoir étudier ce type de suites est donc extrêmement important, pour votre culture déjà et pour comprendre davantage les mécanismes économiques.
Cette année, les choses vont être vues de manière plus approfondie qu'en 1e (nous passons de deux théorèmes à cinq, tous récapitulés en fin de chapitre).
Nous verrons aussi les suites arithmético-géométriques. Ces dernières, plus complexes, nécessitent une maîtrise totale des suites géométriques puisqu'elles en sont le prolongement (toute suite arithmético-géométrique se ramène à l'étude d'une suite géométrique auxiliaire).
Ce chapitre tombant très souvent au Bac, il faut bien le bosser. Il est très méthodique, sans surprise et très rentable : il y a souvent 4 à 5 points à gagner dessus au Bac. Allez, on vous sent motivé, c'est parti !

1. Tout ce qu'il faut savoir sur les suites géométriques

Une suite géométrique, c'est très simple : c'est une suite de nombres où pour passer d'un terme U_n à son successeur U_{n+1} on multiplie toujours par la même chose : ce quelque chose s'appelle la raison et se note q.
Dans votre cours, vous rencontrez donc la définition (plus rigoureuse) suivante : une suite (U_n) est géométrique s'il existe q tel que pour tout n, $U_{n+1} = U_n \times q$.

■ **Exemple :** 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,...

Dans ce cas on a une suite géométrique (U_n) de premier terme $U_0 = 1$ et de raison $q = 2$ (on a : $U_{n+1} = U_n \times 2$). Par exemple, $U_1 = 2$ et $U_5 = 32$.

■ **Exemple :** 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$...

Dans ce cas, on a une suite géométrique, disons (A_n) de premier terme $A_0 = 2$ et de raison $q = \frac{1}{2}$ (on a : $A_{n+1} = A_n \times \frac{1}{2}$). Par exemple, $A_1 = 1$ et $A_4 = \frac{1}{8}$.

METHODE 1 : Comment conjecturer qu'une suite (U_n) est géométrique ?

■ **Principe**

Calculer $\frac{U_1 - U_0}{U_0}$, $\frac{U_2 - U_1}{U_1}$, $\frac{U_3 - U_2}{U_2}$, etc. c'est-à-dire la variation relative des premiers termes. Si ces variations relatives sont constantes alors aucun doute, on peut conjecturer que la suite (U_n) est géométrique de raison $q = \frac{U_1}{U_0}$, (attention !).

■ **Exemple :** *Soit* (U_n) *la suite dont les premiers termes sont* $U_0 = 500$, $U_1 = 2000$, $U_2 = 8000$, $U_3 = 32000$. *Que peut-on conjecturer sur la nature de la suite* (U_n) ?

Voici les premières variations relatives :

$$\frac{U_1 - U_0}{U_0} = \frac{2000 - 500}{500} = \frac{1500}{500} = 3.$$

$$\frac{U_2 - U_1}{U_1} = \frac{8000 - 2000}{2000} = \frac{6000}{2000} = 3.$$

$$\frac{U_3 - U_2}{U_2} = \frac{32000 - 8000}{8000} = \frac{24000}{8000} = 3.$$

Ces premières variations relatives étant constantes, on peut donc conjecturer que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{U_1}{U_0} = \frac{2000}{500} = 4$.

REMARQUE : on voit tout de suite que la suite 500, 2000, 8000, 32000 est bien géométrique de raison 4 puisque pour passer d'un terme à un autre, on multiplie toujours par 4, n'est-ce pas ? Et oh on se réveille !

METHODE 2 : Comment montrer qu'une suite (U_n) est géométrique ?

En présence des premiers termes d'une suite qui semble suivre une progression géométrique, on cherche à être fixé ! Est-elle vraiment géométrique, et comment le prouver ? On dispose fort heureusement de la méthode suivante pour trancher la question.

■ Principe

Vérifier que $U_n \neq 0$ pour tout n. Etudier $\frac{U_{n+1}}{U_n}$: si pour tout n, $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q$ (c'est-à-dire $U_{n+1} = U_n \times q$ pour tout n), où q est un nombre constant qui ne dépend pas de n, alors (U_n) est une suite géométrique de raison q.

■ **Exemple :** *Soit* (U_n) *la suite définie par : pour tout n,* $U_n = 2^n$. *La suite* (U_n) *est-elle géométrique ?*

Pour tout n, $U_n \neq 0$ (car $2^n \neq 0$) donc on peut étudier $\frac{U_{n+1}}{U_n}$.

Pour tout n, $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2^{n+1-n} = 2^1 = 2$. Ainsi (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ (et de premier terme $U_0 = 2^0 = 1$).

■ **Exemple :** *Soit* (C_n) *la suite définie par : pour tout n,* $C_n = 3^{n+1}$. *La suite* (C_n) *est-elle géométrique ?*

Pour tout n, $C_n \neq 0$ (car $3^{n+1} \neq 0$).

Pour tout n, $\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{3^{(n+1)+1}}{3^{n+1}} = \frac{3^{n+2}}{3^{n+1}} = 3^{(n+2)-(n+1)} = 3^1 = 3$. Ainsi (C_n) est une suite géométrique de raison $q = 3$ (et de premier terme $C_0 = 3^1 = 3$).

■ **Exemple :** *Soit* (U_n) *la suite définie par : pour tout* $n > 0$, $U_n = n^2$. *La suite* (U_n) *est-elle géométrique ?*

Pour tout $n > 0$, $U_n \neq 0$ et $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{n^2+2n+1}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$. Ce quotient dépend de n (il est donc non constant), et donc (U_n) n'est pas géométrique.

■ Erreur classique

La raison q n'est pas égale à la variation relative $\frac{U_{n+1}-U_n}{U_n}$. La raison q vérifie l'égalité $q=\frac{U_{n+1}}{U_n}$ (Attention !). Alors que la variation relative vérifie l'égalité $\frac{U_{n+1}-U_n}{U_n}=q-1$ (En effet : $\frac{U_{n+1}-U_n}{U_n}=\frac{U_{n+1}}{U_n}-\frac{U_n}{U_n}=q-1$, ok ?).

METHODE 3 : Comment calculer U_n pour tout n, à partir de U_0 ?

Est-on obligé pour calculer U_{19} de calculer tous les termes précédents ? (car plus on fait de calculs plus on risque de faire des erreurs et puis surtout ça peut être long, très long !) Dispose-t-on en fait d'une méthode pour aller plus vite ? Eh bien oui, et la voici !

■ Principe

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q. Alors pour tout n, $U_n=U_0\times q^n$.

■ **Exemple :** *Soit* (U_n) *la suite définie par :* $\begin{cases}U_{n+1}=U_n\times 3\\ U_0=2\end{cases}$. *Exprimer* U_n *en fonction de* n, *puis calculer* U_8 *et le 20ème terme.*

Par définition, (U_n) est une suite géométrique de raison $q=3$ et de premier terme $U_0=2$. Donc pour tout n, $U_n=U_0\times q^n=2\times 3^n$.

On a donc : $U_8=2\times 3^8=13122$ et le 20ème terme est $U_{19}=U_0\times q^{19}$ soit :

$U_{19}=2\times 3^{19}=2\ 324\ 522\ 934$ (ce qui est énorme ! En fait, une suite géométrique de raison $q>1$ croît d'autant plus rapidement que q est grand !).

REMARQUE : Avec un tableur (ou un algo) c'est fait en deux secondes. Regardez, c'est génial !

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	Un	2	6	18	54	162	486	1458	4374	13122

T	U	V
18	19	20
774840978	2324522934	6973568802

*Dans B1, on écrit 0, Dans C1, on écrit 1. On sélectionne la plage B1:C1, sa poignée de copie qu'on étend jusqu'à X1 (et même au-delà si on veut plus de termes !). Dans B2, on écrit 2 (le 1er terme) et dans C2, on écrit =B2*3. On sélectionne la cellule C2, sa poignée de copie qu'on étend jusqu'à X2.*

■ **Exemple (BAC) QCM.** (U_n) *est une suite géométrique telle que* $U_0 = 2$ *et* $U_8 = 32$. *Sa raison est égale à :*

a) $\sqrt{2}$ *b) 2* *c) 4*

Bonne réponse : a) $\sqrt{2}$.

Justification : pour tout n, $U_n = U_0 \times q^n$, donc $U_8 = U_0 \times q^8$, ce qui donne : $32 = 2 \times q^8$ (puisque $U_8 = 32$ et $U_0 = 2$) soit : $\frac{32}{2} = q^8$ soit : $16 = q^8$.

Maintenant comment déterminer q vérifiant $q^8 = 16$? Eh bien on va essayer les solutions proposées (comme elles sont données, on ne va pas se gêner quand même..). Comme $\sqrt{2}^8 = 16$ (alors que $2^8 = 256 \neq 16$ et $4^8 = 65536 \neq 16$), on a donc forcément : $q = \sqrt{2}$. Ok ?

METHODE 4 : Comment calculer U_n pour tout n, à partir de U_p pour tout p ?

La méthode 4 est une généralisation, de la méthode 3 : on veut exprimer U_n à partir d'un terme U_p qui n'est pas forcément U_0.

■ Principe

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q. Alors pour tout n, pour tout p, $U_n = U_p \times q^{n-p}$.

■ **Exemple :** *Soit* (U_n) *la suite définie par :* $\begin{cases} U_{n+1} = U_n \times (-2) \\ U_1 = 7 \end{cases}$. *Exprimer* U_n *en fonction de* n*, puis calculer* U_{17} *et le 24ème terme.*

Par définition, (U_n) est une suite géométrique de raison $q = -2$ et de premier terme $U_1 = 7$ (ce n'est pas cette fois-ci U_0 !)

Donc pour tout n, pour tout p, $U_n = U_p \times q^{n-p}$.

En particulier pour $p = 1$, on obtient : $U_n = U_1 \times q^{n-1} = 7 \times (-2)^{n-1}$ pour tout n.

On a donc : $U_{17} = 7 \times (-2)^{16} = 458752$. Le 24ème terme est cette fois-ci $U_{24} = 7 \times (-2)^{23} = -58\ 720\ 256$ (car le premier est U_1).

■ **Exemple :** *Soit* (U_n) *la suite géométrique telle que* $U_2 = 4$ *et* $U_5 = 32$. *Exprimer* U_n *en fonction de* n.

On a pour tout n, pour tout p, $U_n = U_p \times q^{n-p}$. Ce qui donne (pour $n = 5$ et $p = 2$) : $U_5 = U_2 \times q^{5-2}$ soit : $32 = 4 \times q^3$ soit : $8 = q^3$ soit : $q = 2$. Ainsi (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$. Pour tout n, $U_n = U_2 \times q^{n-2} = 4 \times 2^{n-2} = 2^2 \times 2^{n-2} = 2^{2+n-2} = 2^n$.

METHODE 5 : Comment déterminer à quel rang n correspond le terme M d'une suite géométrique de raison q ?

■ **Principe**

Tout revient à résoudre l'équation $U_n = M$ d'inconnue n.

- Si on connaît U_0, on utilise la formule $U_n = U_0 \times q^n$.
- Si on ne connaît pas U_0, mais un autre terme U_p, on cherche de proche en proche le terme correspondant (car la formule $U_n = U_p \times q^{n-p}$ est alors compliquée à utiliser).
- On n'hésite pas à utiliser la touche ln (logarithme népérien) de la calculatrice (vous allez voir comment dans les exemples qui suivent) pour trouver n.

■ **Exemple :** *On considère la suite* (U_n) *définie par* $\begin{cases} U_{n+1} = U_n \times 3 \\ U_0 = 2 \end{cases}$. *A quel rang n, correspond le terme 4374 ?*

On résout l'équation $U_n = 4374$. Comme on connaît U_0 (qui vaut 2) on utilise la formule $U_n = U_0 \times q^n$, ce qui donne l'équation $4374 = U_0 \times q^n$ soit : $4374 = 2 \times 3^n$ (car la suite est géométrique de raison $q = 3$) soit : $2187 = 3^n$. Maintenant, pour trouver n on écrit : $\dfrac{\ln(2187)}{\ln(3)}$ (avec la touche ln de la calculatrice), la calculatrice nous affiche 7, on a donc : $n = 7$.
Conclusion : $4374 = U_7$ (il s'agit donc du terme de rang 7).

REMARQUE IMPORTANTE : ln signifie logarithme népérien. La fonction logarithme népérien $x \to \ln(x)$ *sera vue au chapitre 6, elle est excessivement importante. La chose que vous devez retenir sur elle pour le moment, c'est que pour trouver la valeur de n qui vérifie* $2187 = 3^n$, *on tape* $\dfrac{\ln(2187)}{\ln(3)}$, *la calculatrice affiche 7 ce qui signifie que* $2187 = 3^7$ *(ce qui est d'ailleurs vrai).*
Autre exemple, si on cherche, la valeur de n vérifiant $1024 = 2^n$, *on tape* $\dfrac{\ln(1024)}{\ln(2)}$, *et on trouve 10, ce qui signifie que* $1024 = 2^{10}$. *Ok ?*

■ **Exemple :** *On considère la suite* (U_n) *définie par* $\begin{cases} U_{n+1} = U_n \times 1{,}10 \\ U_0 = 1000 \end{cases}$. *A quel rang n, correspond le terme 1610,51 ?*

On résout l'équation $U_n = 1610{,}51$. Comme on connaît U_0 (qui vaut 1000) on utilise la formule $U_n = U_0 \times q^n$, ce qui donne l'équation $1610{,}51 = 1000 \times q^n$ soit : $1610{,}51 = 1000 \times 1{,}10^n$ (car la suite est géométrique de raison $q = 1{,}10$) soit : $1{,}61051 = 1{,}10^n$. Maintenant, pour trouver n on écrit : $\dfrac{\ln(1{,}61051)}{\ln(1{,}10)}$, la calculatrice nous affiche 5, on a donc : $n = 5$.
Conclusion : $1610{,}51 = U_5$ (il s'agit donc du terme de rang 5).

■ **Exemple :** *On considère la suite* (U_n) *définie par* $\begin{cases} U_{n+1} = U_n \times 5 \\ U_2 = 100 \end{cases}$. *A quel rang n, correspond le terme 12500 ?*

On résout l'équation $U_n = 12500$. Avec la formule $U_n = U_p \times q^{n-p}$ (en prenant $p = 2$ puisqu'on connaît U_2), cela donne $U_n = U_2 \times q^{n-2}$ soit : $12500 = 100 \times 5^{n-2}$ (car $U_2 = 100$ et car la suite est géométrique de raison $q = 5$) soit : $125 = 5^{n-2}$. Maintenant, on écrit : $\dfrac{\ln(125)}{\ln(5)}$ (avec la touche ln de la calculatrice), la calculatrice nous affiche 3, on a donc : $n - 2 = 3$ soit : $n = 5$.
Conclusion : $12500 = U_5$ (il s'agit donc du terme de rang 5).

REMARQUE : on peut aussi « faire » sans ln, voici comment : La suite $\begin{cases} U_{n+1} = U_n \times 5 \\ U_2 = 100 \end{cases}$ *est géométrique de raison 5. Comme* $U_2 = 100$, *on a :* $U_3 = U_2 \times 5 = 100 \times 5 = 500$, $U_4 = U_3 \times 5 = 500 \times 5 = 2500$ *et* $U_5 = U_4 \times 5 = 2500 \times 5 = 12500$. Ok ?

■ **Exemple :** *On considère la suite* (Z_n) *définie par* $\begin{cases} Z_{n+1} = Z_n \times 2 \\ Z_4 = 5 \end{cases}$. *A quel rang n, correspond le terme 640 ?*

Allons-y, comme $Z_4 = 5$ et que la raison vaut 2, on a $Z_5 = 10$, $Z_6 = 20$, $Z_7 = 40$, $Z_8 = 80$, $Z_9 = 160$, $Z_{10} = 320$ et $Z_{11} = 640$.
Conclusion : Le terme 640 correspond au rang 11, puisqu'on a : $Z_{11} = 640$.

METHODE 6 : Comment traduire par une suite géométrique une augmentation ou une diminution de t % ?

■ **Principe**

C'est très important et c'est très simple :

- Si on a augmentation de t %, il s'agit d'une suite géométrique de raison $q = 1 + \frac{t}{100}$.
- Si on a une diminution de t %, il s'agit d'une suite géométrique de raison $q = 1 - \frac{t}{100}$.

■ **Exemple (augmentation de t %) :** *En janvier 2015, on place 1000 € à la banque sur un compte rémunéré à 2,5 % annuel. Soit* (U_n) *la suite où* U_n *représente la somme en € sur le compte l'année* $2015 + n$.

a) Donner la nature de la suite (U_n)*, sa raison et son premier terme.*

b) Exprimer U_n en fonction de n.

c) Déterminer la somme présente sur le compte en 2020 (on arrondira au centime d'euro près).

a) Comme il s'agit d'une augmentation de 2,5 %, (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 1 + \frac{t}{100} = 1 + \frac{2,5}{100} = 1,025$. Son premier terme est $U_0 = 1000$.

b) Pour tout n, $U_n = U_0 \times q^n = 1000 \times 1,025^n$.

c) 2020 correspond au terme U_5 (puisque U_n représente la somme en € sur le compte l'année $2015 + n$). On a : $U_5 = U_0 \times q^5 = 1000 \times 1,025^5 \simeq 1131,41$ €.

■ **Exemple (diminution de t %) :** A 8h00*, un biologiste étudie une plaquette de 32000 bactéries. Chaque heure, 25 % des bactéries restantes meurent. Soit* (U_n) *la suite où* U_n *représente le nombre de bactéries vivantes à l'heure* $8^h + n$.

a) Donner la nature de la suite (U_n)*, sa raison et son premier terme.*

b) Exprimer U_n *en fonction de n.*

c) Déterminer le nombre de bactéries présente à 12h00.

a) Comme il s'agit d'une diminution de 25 %, (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 1 - \frac{t}{100} = 1 - \frac{25}{100} = 0,75$. Son premier terme est $U_0 = 32000$.

b) Pour tout n, $U_n = U_0 \times q^n = 32000 \times 0,75^n$.