Chapitre 1.
Raisonnement par récurrence

1. Comment effectuer et rédiger un raisonnement par récurrence pour démontrer des formules algébriques?

Coach : Ce type de raisonnement a été inventé par le génialissime Blaise Pascal (1623-1662), mathématicien, physicien et philosophe français.

Méthode

On donne un nom, par exemple $P(n)$, à la propriété (c'est-à-dire la formule) qu'on veut démontrer. Ensuite, pour montrer que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq k$, on procède en trois étapes :

Etape 1 : Initialisation. On montre que la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $P(k)$ est vraie pour $n = k$.

Etape 2 : Hérédité. On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie et on montre que la propriété $P(n+1)$ l'est encore.

Etape 3 : Conclusion. On rédige alors : « comme $P(k)$ est vraie et qu'il y a hérédité, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq k$.

Exemple (force 2)

Ex. 1. *Démontrer par récurrence : « pour* $n \geq 0$, $1+q+q^2+...+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ *(* $q \neq 1$ *) ».*

Soit $P(n)$ la propriété $1+q+q^2+...+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ $q \neq 1$.

Etape 1 : Initialisation. $P(0)$ est vraie car pour $n = 0$, on a : $1 = \dfrac{1-q^{0+1}}{1-q}$ (en effet $\dfrac{1-q^{0+1}}{1-q} = \dfrac{1-q}{1-q} = 1$)

Coach : Remarque qu'on démarre l'initialisation à $P(0)$, puisque la propriété est à démontrer pour $n \geq 0$.

Etape 2 : Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie (c'est-à-dire que : $1+q+q^2+...+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$) et montrons que $P(n+1)$ l'est encore (c'est-à-dire qu'on a : $1+q+q^2+...+q^n+\mathbf{q^{n+1}} = \dfrac{1-q^{n+2}}{1-q}$).

On a : $1+q+q^2+...+q^n+\mathbf{q^{n+1}} = \underbrace{1+q+q^2+...+q^n}_{\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}+\mathbf{q^{n+1}} = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}+q^{n+1}$

$$= \frac{1-q^{n+1}}{1-q}+\frac{q^{n+1}\times(1-q)}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}+\frac{q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}+q^{n+1}-q^{n+2}}{1-q} = \frac{1-q^{n+2}}{1-q} .$$

On a donc bien hérédité.

Etape 3 : Conclusion. Comme $P(0)$ est vraie et qu'on a hérédité, $P(n)$ vraie pour tout $n \geq 0$ et donc : « Pour $n \geq 0$, $1+q+q^2+...+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ » (si $q \neq 1$).

EXERCICE-TEST

Coach : Allez, quelques exos pour t'entraîner !

Exercice-Test (force 2)

ET1. *Montrer par récurrence que pour* $n \geq 1$, $1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

ET2. *Montrer par récurrence que pour* $n \geq 1$, $1^3+2^3+3^3+...+n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

ET3. *Montrer par récurrence que pour* $n \geq 1$,
$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n\times(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

ET4. *Soit* $x>0$. *Montrer par récurrence que pour* $n \geq 0$, $(1+x)^n \geq 1+nx$ *(Cette inégalité est appelée inégalité de Jacques Bernoulli [1654-1705]).*

ET5. *Montrer par récurrence que pour* $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.

2. Comment effectuer et rédiger un raisonnement par récurrence pour démontrer des propriétés sur des suites ?

Coach : Le raisonnement par récurrence a de très belles applications, comme de démontrer certaines propriétés des suites (leur expression, leurs variations, etc.)

Méthode

On donne un nom, par exemple $P(n)$, à la propriété (sur les suites) qu'on veut démontrer. Ensuite, pour montrer que la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq k$, on procède en trois étapes :

Etape 1 : Initialisation. On montre que la propriété $P(k)$ est vraie, c'est-à-dire que $P(k)$ est vraie pour $n = k$.

Etape 2 : Hérédité. On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie et on montre que la propriété $P(n+1)$ l'est encore.

Etape 3 : Conclusion. On rédige alors : « comme $P(k)$ est vraie et qu'il y a hérédité, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq k$.

Exemple (force 2)

Ex. 1. *Soit* (u_n) *la suite définie par son premier terme* $u_0 = 5$ *et pour tout entier naturel n par* $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 0{,}5n - 1{,}5$. *Démontrer par récurrence que pour tout* $n \geq 3$, $u_{n+1} > u_n$. *Que peut-on en déduire sur le sens de variation de la suite* (u_n) *?*

Soit $P(n)$ la propriété : $u_{n+1} > u_n$.

Etape 1 : Initialisation. $P(3)$ est vraie car pour $n = 3$, on a : $u_4 > u_3$ (en effet après calculs, on a : $u_4 = -0{,}375$ et $u_3 = -0{,}75$).

Coach : En effet, comme $u_0 = 5$, on a d'après $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 0{,}5n - 1{,}5$,

$$u_1 = 0{,}5u_0 + 0{,}5 \times 0 - 1{,}5 = 0{,}5 \times 5 + 0{,}5 \times 0 - 1{,}5 = 2{,}5 + 0 - 1{,}5 = 1$$

$$u_2 = 0{,}5u_1 + 0{,}5 \times 1 - 1{,}5 = 0{,}5 \times 1 + 0{,}5 \times 1 - 1{,}5 = 0{,}5 + 0{,}5 - 1{,}5 = -0{,}5$$

$$u_3 = 0{,}5u_2 + 0{,}5 \times 2 - 1{,}5 = 0{,}5 \times (-0{,}5) + 1 - 1{,}5 = -0{,}75$$

$$u_4 = 0{,}5u_3 + 0{,}5 \times 3 - 1{,}5 = 0{,}5 \times (-0{,}75) + 1{,}5 - 1{,}5 = -0{,}375.$$

Etape 2 : Hérédité. Supposons $P(n)$ vraie, c'est-à-dire que $u_{n+1} > u_n$ (soit $u_{n+1} - u_n > 0$) et montrons que $P(n+1)$ l'est encore, c'est-à-dire qu'on a : $u_{n+2} > u_{n+1}$ (c'est-à-dire que $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$).

> **Coach** : Le fait d'utiliser l'équivalence $u_{n+1} > u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n > 0$ est une petite astuce bien utile dans certaines circonstances.

On a : $u_{n+2} - u_{n+1} = 0,5u_{n+1} + 0,5(n+1) - 1,5 - (0,5u_n + 0,5n - 1,5)$

$= 0,5u_{n+1} + 0,5n + 0,5 - 1,5 - 0,5u_n - 0,5n + 1,5$

$= 0,5u_{n+1} - 0,5u_n + 0,5 = 0,5(u_{n+1} - u_n) + 0,5$.

On a donc : $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$ car $0,5(u_{n+1} - u_n) + 0,5$ (car $\begin{cases} u_{n+1} - u_n > 0 \\ 0,5 > 0 \end{cases}$).

On a donc bien hérédité.

Etape 3 : Conclusion. Comme $P(3)$ est vraie et qu'on a hérédité, $P(n)$ vraie pour tout $n \geq 3$. Ainsi pour tout $n \geq 3$, $u_{n+1} > u_n$, donc $(u_n)_{n \geq 3}$ est strictement croissante.

EXERCICES-TESTS

> **Coach** : Au programme, des raisonnements par récurrence qui te permettront de démontrer deux formules algébriques, un encadrement et un sens de variation sur les suites.

Exercice-Test (force 2)

ET1. *Soit* (p_n) *la suite définie par* $p_1 = 0,1$ *et* $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$ *.Montrer par récurrence que pour tout* $n \geq 1$, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

Exercice-Test (force 3)

ET2. *Soit* (U_n) *la suite définie par* $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2}$ *et* $U_0 = 1$. *Démontrer par récurrence que pour tout* $n \geq 0$, $0 < U_n \leq 2$.

Chapitre 2.
Limites de suites

1. Comment déterminer la limite d'une suite de référence ?

Coach : En termes de notation, comme la limite d'une suite se fera toujours lorsque $n \to +\infty$ tu peux écrire indifféremment $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou $\lim u_n$.

Méthode

On retient bien le tableau suivant :

u_n	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
$u_n = n$	$+\infty$
$u_n = n^2$	$+\infty$
$u_n = n^k$ (k entier positif)	$+\infty$
$u_n = an+b$	$\begin{cases} +\infty \text{ si } a>0 \\ -\infty \text{ si } a<0 \end{cases}$
$u_n = \frac{1}{n}$	0
$u_n = \frac{1}{n^2}$	0
$u_n = \frac{1}{n^k}$ (k entier positif)	0
$u_n = \sqrt{n}$	$+\infty$
$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$	0
$u_n = q^n$	$\begin{cases} \text{n'existe pas si } q<-1 \\ 0 \text{ si } -1<q<1 \\ 1 \text{ si } q=1 \\ +\infty \text{ si } q>1 \end{cases}$

Exemples (force 1)

Ex. 1. *On a* $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^4 = +\infty$.

Ex. 2. *On a* $\lim\limits_{n\to+\infty} 10n-5=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n+7{,}8=-\infty$.

Ex. 3. *On a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^4}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^5}=0$.

Ex. 4. *On a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty$.

Ex. 5. *On a* $\lim\limits_{n\to+\infty} (1{,}07)^n=+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}88)^n=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-0{,}75)^n=0$.

Coach : Tous ces résultats ont été trouvés grâce au tableau. Comme ce sont des suites de référence, tu n'as rien à justifier !

2. Comment déterminer la limite d'une suite ?

Méthode

On utilise les règles suivantes : $\dfrac{1}{+\infty}=0^+$, $\dfrac{1}{-\infty}=0^-$, $\dfrac{1}{0^+}=+\infty$, $\dfrac{1}{0^-}=-\infty$.

Coach : Attention, tu n'as pas le droit d'écrire $\dfrac{1}{+\infty}=0^+$ dans une copie, tu dois rédiger en utilisant des accolades. Rassure-toi, le principe est rigoureusement identique !

Exemples (force 2)

Ex. 1. *On a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{5n-6}=0$ *car :* $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} 1=1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 5n-6=+\infty \end{cases}$.

Ex. 2. *On a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2n+1}=0$ *car :* $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 1=1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2n+1=+\infty \end{cases}$.

Coach : Bien sûr :

a) la règle $\dfrac{1}{+\infty}=0^+$ se généralise à $\dfrac{2}{+\infty}=0^+$, $\dfrac{3}{+\infty}=0^+$, …, $\dfrac{-1}{+\infty}=0^-$, $\dfrac{-2}{+\infty}=0^-$, $\dfrac{-3}{+\infty}=0^-$, …

b) la règle $\dfrac{1}{-\infty}=0^-$ se généralise à $\dfrac{2}{-\infty}=0^-$, $\dfrac{3}{-\infty}=0^-$, …, $\dfrac{-1}{-\infty}=0^+$,etc.

c) la règle $\dfrac{1}{0^+}=+\infty$ se généralise à $\dfrac{2}{0^+}=+\infty$, $\dfrac{3}{0^+}=+\infty$, …, $\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$, etc.

d) la règle $\dfrac{1}{0^-}=-\infty$ se généralise à $\dfrac{2}{0^-}=-\infty$, $\dfrac{3}{0^-}=-\infty$, …, $\dfrac{-1}{0^-}=+\infty$, etc.

Ex. 3. *On a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2}{5n-1} = 0$ *car :* $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} -2 = -2 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 5n-1 = +\infty \end{cases}$.

Ex. 4. *On a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6}{-2n+3} = 0$ *car :* $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} 6 = 6 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -2n+3 = -\infty \end{cases}$.

Ex. 5. *On a :* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{-n^2-2} = 0$ *car :* $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} 5 = 5 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} -n^2-2 = -\infty \end{cases}$.

EXERCICE-TEST

Exercice-Test (force 2)

ET1. *Déterminer a)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-3}{2n-4}$ *b)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2}{-0{,}75n+1}$ *c)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-5}{2n^2+n}$.

3. Comment déterminer la limite d'une somme de deux suites ?

Coach : Dans la plupart des cas, la limite d'une somme vaut la somme des limites (sauf cas particulier lorsqu'on additionne deux infinis contraires, on obtient une forme indéterminée). C'est ce qu'illustre le tableau ci-dessous.

Méthode

On utilise le tableau ci-dessous donnant la limite de $u_n + v_n$:

$\text{Lim}v_n$ / $\text{Lim}u_n$	L_2	$+\infty$	$-\infty$
L_1	$L_1 + L_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	f.i
$-\infty$	$-\infty$	f.i	$-\infty$

Coach : Attention $+\infty-\infty$ et $-\infty+\infty$ sont des f.i (formes indéterminées).

Exemples (force 2)

Ex. 1. *Déterminer a)* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^4+n$ *b)* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-\frac{1}{n}$ *c)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}+3$ *d)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}-6$

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\frac{1}{n^2}$ *f)* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+6$ *g)* $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+\sqrt{n}$ *h)* $\lim\limits_{n\to+\infty} -5n-n^3$.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^4+n=+\infty$ car : $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} n^4=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty\end{cases}$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-\frac{1}{n}=+\infty$ car : $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}=0\end{cases}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}+3=3$ car : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}=0$. d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}-6=+\infty$ car : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty$.

e) $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\frac{1}{n^2}=3$ car : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}=0$. f) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+6=+\infty$ car : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$.

g) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2+\sqrt{n}=+\infty$ car $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}=+\infty\end{cases}$ h) $\lim\limits_{n\to+\infty} -5n-n^3=-\infty$ car : $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} -5n=-\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} -n^3=-\infty\end{cases}$.

Ex. 2. *Déterminer a)* $\lim\limits_{n\to+\infty} -n-2n^2$ *b)* $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\times(0{,}87)^n+3n-1$ *c)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{6}\right)^n-1$.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} -n-2n^2=-\infty$ car : $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} -n=-\infty\\ \lim\limits_{n\to+\infty} -2n^2=-\infty\end{cases}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\times(0{,}87)^n+3n-1=+\infty$ car : $\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty} 2\times(0{,}87)^n=2\times0=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3n-1=+\infty\end{cases}$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{6}\right)^n-1=-1$ car : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{6}\right)^n-1=\frac{1}{2}\times0-1=-1$.

EXERCICE-TEST

Exercice-Test (force 2)

ET1. *Déterminer a)* $\lim\limits_{n\to+\infty} -1{,}2\times(0{,}91)^n-5n+1$ *b)* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{5}\times\left(\frac{7}{8}\right)^n-\frac{1}{8}$.