Algèbre et géométrie 1re année

Chapitres concernés :

1. Logique, raisonnement
2. Ensembles et applications
3. Calculs algébriques
4. Nombres complexes, trigonométrie
5. Polynômes
6. Arithmétique
7. Structures algébriques
8. Calcul matriciel
9. Fractions rationnelles
10. Systèmes linéaires
11. Géométrie du plan et de l'espace
12. Espaces vectoriels
13. Applications linéaires
14. Dimension finie
15. Matrices et applications linéaires
16. Déterminants
17. Produit scalaire

Il y a une infinité de nombres premiers

Chapitre concerné : 1. Logique, raisonnement

☐ Ce que montre cet exo

Que les nombres premiers (qui sont des entiers qui n'admettent pas d'autres diviseurs que 1 et eux-mêmes, comme 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23…) sont infinis. Il s'agit d'un résultat d'Euclide.

- **L'énoncé**

On souhaite montrer par l'absurde qu'il y a un nombre infini de nombres premiers.
On suppose qu'il y a un nombre fini de nombres premiers p_1, p_2, …, p_k triés par ordre croissant. On considère l'entier $N = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k$.
1) Montrer que $N+1 > p_k$.
2) Montrer que l'entier $N+1$ n'admet pas d'autres diviseurs que 1 et lui-même et qu'il est par conséquent premier.
3) Montrer que les questions **1)** et **2)** aboutissent à une contradiction.

- **Corrigé**

1) $N+1 = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k + 1$. Comme $p_1 > 2$ (et par conséquent tous les autres p_i), on en déduit que $N+1 > p_k$.
2) Tout d'abord, les entiers 1 et $N+1$ divisent $N+1$. Montrons que ce sont les seuls en considérant k un entier différent de 1 et $N+1$ et qui divise $N+1$. Comme $k \geq 2$, on en déduit que k admet un diviseur premier (car tout entier supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier) qui figurent nécessairement parmi la liste des nombres premiers p_1, p_2, …, p_k. Appelons-le donc p_i. Comme p_i divise k, et que k divise $N+1$, on en déduit que p_i divise $N+1$. Par ailleurs p_i divise $N = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_k$.
3) Comme p_i divise $N+1$ et p_i divise N, on en déduit que p_i divise leur différence égale à $N+1-N=1$. CONTRADICTION ! (car un nombre premier est supérieur ou égal à 2 et donc ne peut pas diviser 1).
Conclusion : il y a bien un nombre infini de nombres premiers.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Le raisonnement par l'absurde : pour montrer que la proposition P est vraie, on suppose qu'elle est fausse et qu'on aboutit à une contradiction.
2) Tout entier supérieur ou égal à 2 admet au moins un diviseur premier.
3) Un nombre premier est un nombre supérieur ou égal à 2 et qui n'admet pas d'autres diviseurs que 1 et lui-même.
4) Lorsque a divise b et c, alors a divise leur différence $b-c$.

$\sqrt{2}$ est irrationnel

Chapitre concerné : 1. Logique, raisonnement

☐ Ce que montre cet exo

Que le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel (grâce à un raisonnement par l'absurde).

- **L'énoncé**

1) Montrer l'implication directe : n pair $\Rightarrow$ n^2 pair.

2) En utilisant un raisonnement par contraposée, montrer que n^2 pair $\Rightarrow$ n pair.

3) En déduire l'équivalence n pair $\Leftrightarrow$ n^2 pair.

4) Application : montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel en utilisant un raisonnement par l'absurde.

- **Corrigé**

1) Supposons n pair, alors il existe un entier k tel que $n = 2k$.

On a donc : $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$, ce qui prouve que n^2 est pair (car de la forme $2j$).

Ainsi, on vient de montrer l'implication : n pair $\Rightarrow$ n^2 pair.

2) La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est non $Q \Rightarrow$ non P. La contraposée de la proposition n^2 pair $\Rightarrow$ n pair est donc : n impair $\Rightarrow$ n^2 impair. Prouvons cette contraposée :

Supposons n impair, alors $n = 2k+1$ donc $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1$, ce qui prouve que n est impair (car de la forme $2j+1$). Ainsi on vient de montrer n impair $\Rightarrow$ n^2 impair, strictement équivalente à la proposition n^2 pair $\Rightarrow$ n pair.

3) Comme n pair $\Rightarrow$ n^2 pair (question 1)) et n^2 pair $\Rightarrow$ n pair (question **2)**), on en déduit l'équivalence n pair $\Leftrightarrow$ n^2 pair.

4) Supposons que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $\mathrm{pgcd}(p,q) = 1$. En passant au carré, on a : $2 = \frac{p^2}{q^2}$ soit $p^2 = 2q^2$. Cela prouve que p^2 est pair et donc que p est pair : il existe k entier tel que $p = 2k$.

L'égalité $p^2 = 2q^2$ devient alors : $(2k)^2 = 2q^2$ donc $4k^2 = 2q^2$ donc $2k^2 = q^2$. Cela prouve que q^2 est et donc que q est pair . Bilan : Si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $\mathrm{pgcd}(p,q) = 1$ alors p et q sont pairs (donc divisibles par 2). CONTRADICTION ! (car alors $\mathrm{pgcd}(p,q) \neq 1$). Conclusion : $\sqrt{2}$ est bien un nombre irrationnel.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Un entier pair est un entier de la forme 2j. Un entier impair est un entier de la forme $2j+1$.
2) La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est non $Q \Rightarrow$ non P.
3) Montrer l'équivalence $A \Leftrightarrow B$ revient à montrer $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$.
4) Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible.
5) Le principe du raisonnement par l'absurde.

Une récurrence pour une somme

Chapitre concerné : 1. Logique, raisonnement

☐ Ce que montre cet exo

Il montre comment démontrer la formule $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ par récurrence.

- **L'énoncé**

En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ pour $n \geq 1$.

- **Corrigé**

Soit P_n la propriété « $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ».

Initialisation : P_1 est vraie car $1=\dfrac{1\times 2}{2}$.

Hérédité : Supposons P_n vraie (c'est-à-dire que $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$), et montrons que P_{n+1} est encore vraie (c'est-à-dire que $1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$).

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\underbrace{1+2+3+\cdots+n}_{\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+2)(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Conclusion : comme P_1 est vraie, et que P_n est héréditaire, P_n est vraie pour $n \geq 1$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

Le principe du raisonnement par récurrence (initialisation, hérédité, conclusion).

Résolution d'équation par analyse-synthèse

Chapitre concerné : 1. Logique, raisonnement

☐ Ce que montre cet exo

Il montre comment résoudre l'équation $x^x = x^2$ par analyse-synthèse.

- **L'énoncé**

Résoudre par analyse-synthèse l'équation $x^x = x^2$ sur $]0\,;+\infty[$.

- **Corrigé**

Analyse : Soit $x > 0$ tel que $x^x = x^2$ alors $\ln(x^x) = \ln(x^2)$ donc $x\ln(x) = 2\ln(x)$ donc $(x-2)\ln(x) = 0$ donc $\begin{cases}(x-2)=0\\ \text{ou}\\ \ln(x)=0\end{cases}$ donc $\begin{cases}x=2\\ \text{ou}\\ x=1\end{cases}$.

Ainsi : si x est solution alors nécessairement $x = 1$ ou $x = 2$.

Synthèse : 1 est bien solution de l'équation $x^x = x^2$ car $1^1 = 1^2$.

2 est bien solution de l'équation $x^x = x^2$ car $2^2 = 2^2$.

Ainsi il est suffisant que x soit égal à 1 ou à 2 pour que $x^x = x^2$.

Conclusion :

Analyse : Si $x > 0$ est solution de $x^x = x^2$ alors $x = 1$ ou $x = 2$.

Synthèse : Si $x = 1$ ou $x = 2$ alors x est solution de $x^x = x^2$.

On a donc l'équivalence : $x^x = x^2 \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ \text{ou}\\ x=2\end{cases}$.

Ainsi l'équation $x^x = x^2$ admet pour ensemble des solutions $S = \{1;2\}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) Un raisonnement par analyse-synthèse est un raisonnement démontrant une implication puis sa réciproque.

Dans la partie analyse, on suppose que x est solution de l'équation, on en déduit une condition nécessaire que doit vérifier x.

Dans la partie synthèse, on regarde si les conditions nécessaires sont aussi suffisantes.

2) $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

3) $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^0 \Leftrightarrow x = 1$.

La formule de Vandermonde

Chapitre concerné : 2. Ensembles et applications

☐ Ce que montre cet exo

La démonstration de la formule $\binom{a+b}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

- **L'énoncé**

On considère deux ensembles A et B disjoints tels que $\text{card}(A)=a$ et $\text{card}(B)=b$.
On considère maintenant l'ensemble $E=A\cup B$.
1) Que vaut $\text{card}(E)$? Déterminer le nombre de sous-ensembles à n éléments de E.
2) On considère C, une partie de $E=A\cup B$ à n éléments. C étant constituée de k éléments de A et de $n-k$ éléments de B (avec $0\leq k\leq n$). Combien y a-t-il de possibilités de constituer C ?
3) En déduire la formule de Vandermonde $\binom{a+b}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

- **Corrigé**

1) On a $\text{card}(E)=\text{card}(A\cup B)=\text{card}(A)+\text{card}(B)-\text{card}(A\cap B)=a+b-0=a+b$
Il y a donc $\binom{a+b}{n}$ sous-ensembles à n éléments de E.
2) Fixons une valeur de k (avec $0\leq k\leq n$). Il y a $\binom{a}{k}$ possibilités pour les k éléments de A et $\binom{b}{n-k}$ possibilités $n-k$ éléments de B ce qui fait $\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$ possibilités en tout (principe multiplicatif). Ainsi, k pouvant varier entre 0 et n, le nombre total de manières de constituer C vaut $\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.
3) Selon que l'on dénombre à la manière de la question 1) ou de la question 2), on obtient le même nombre de sous-ensembles de n éléments de $E=A\cup B$, d'où $\binom{a+b}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

1) $\text{card}(A\cup B)=\text{card}(A)+\text{card}(B)-\text{card}(A\cap B)$.
2) Il y a $\binom{n}{k}$ sous-parties de k éléments d'un ensemble à n éléments (pour $0\leq k\leq n$).
3) Le principe multiplicatif $\text{card}(E\times F)=\text{card}(E)\times\text{card}(F)$.

La fonction affine $x \to mx + p$ est bijective

Chapitre concerné : 2. Ensembles et applications

☐ Ce que montre cet exo

Toute fonction affine $f : x \to f(x) = mx + p \quad (m \neq 0)$ est injective, surjective et donc bijective.

- **L'énoncé**

On considère l'application $f : x \to f(x) = mx + p \ (m \neq 0)$ définie sur l'ensemble de départ $E = \mathbb{R}$ et à valeurs dans l'espace d'arrivée $F = \mathbb{R}$.
1) Démontrer que f est une application injective.
2) Démontrer que f est une application surjective.
3) Démontrer que f est une application bijective puis déterminer l'application réciproque f^{-1}.

- **Corrigé**

1) Soient a et b deux éléments de $E = \mathbb{R}$. Démontrons l'implication $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.
Supposons $f(a) = f(b)$ alors $ma + p = mb + p$ donc : $m a = m b$ donc $a = b$ (car $m \neq 0$).
Conclusion : f est injective.
2) Soit $y \in F$. Démontrons qu'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
$y = f(x)$ équivaut à $y = mx + p$ c'est-à-dire $mx = y - p$ c'est-à-dire : $x = \dfrac{y-p}{m}$.
Ainsi pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ (à savoir $x = \dfrac{y-p}{m}$) tel que $y = f(x)$.
Conclusion : f est surjective.
3) Comme f est injective et surjective, on en déduit que f est bijective. L'application f^{-1} définie sur F et à valeurs dans E par $f^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{2}$ est la bijection réciproque recherchée.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

f injective équivaut à : $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.
f surjective équivaut à : pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
f bijective équivaut à : f injective et surjective.

Composée injective, composée surjective

Chapitre concerné : 2. Ensembles et applications

☐ Ce que montre cet exo

Une condition suffisante pour qu'une fonction soit injective et une condition suffisante pour qu'elle soit surjective.

- **L'énoncé**

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer que :

1) $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective.

2) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective.

- **Corrigé**

1) Supposons que $f(a) = f(b)$. Alors $g \circ f(a) = g \circ f(b)$. Si $g \circ f$ est injective alors cela entraîne $a = b$. Ainsi $f(a) = f(b)$ entraîne $a = b$, ce qui entraîne f injective.

Ainsi $g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective.

2) Soit $y \in G$, si $g \circ f$ surjective alors il existe $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x)$ soit $y = g(f(x))$. Ainsi il existe $z \in F$ (à savoir $z = f(x)$) tel que $y = g(z)$, ce qui entraîne g surjective.

Ainsi $g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective.

☐ Ce qu'il faut retenir du cours

f injective équivaut à : $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.

$f : E \to F$ surjective équivaut à : pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.