

# Table des matières

Avant-propos	iii
<b>1 CONVOLUTION</b>	<b>1</b>
1.1 Préliminaires sur les groupes	1
1.1.1 Groupes topologiques.	1
1.1.2 Action des translations sur les fonctions et les mesures.	2
1.1.3 Mesure de Haar.	3
1.1.4 Mesure de Haar de $\mathbb{T}^n$ .	3
1.1.5 Espaces $L^p(G)$ .	4
1.2 Convolution	5
1.2.1 Caractères de $L^1(G)$ et de $G$	8
1.3 Approximations de l'unité	10
1.4 Régularisation	12
1.4.1 L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .	13
1.5 L'algèbre des mesures bornées	14
1.6 Dérivation des intégrales	17
1.6.1 L'opérateur de Hardy-Littlewood.	18
1.6.2 Le théorème de dérivation de Lebesgue.	20
<b>2 TRANSFORMATION DE FOURIER SUR <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>25</b>
2.1 Définitions et formules élémentaires	25
2.2 Transformation de Fourier sur $L^1$	26
2.3 La transformation de Fourier-Plancherel	29
2.4 Transformation de Fourier et dérivation	30
2.5 Le principe d'incertitude de Heisenberg	36
2.6 Equation de la chaleur	38
2.7 Transformation de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	41
2.7.1 Généralités sur les espaces semi-normés	41
2.7.2 L'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de L. Schwartz	42
2.8 Les fonctions de Hermite-Weber	43
2.8.1 Les polynômes de Hermite	43
2.8.2 Les fonctions de Hermite-Weber	44
2.9 Autre convention, autres formules	46

<b>3</b>	<b>SERIES DE FOURIER</b>	<b>49</b>
3.1	Notations et préliminaires . . . . .	49
3.2	Transformation de Fourier . . . . .	51
3.3	Transformation de Fourier et dérivation . . . . .	55
3.4	Sommes partielles . . . . .	56
3.4.1	Le phénomène de Gibbs . . . . .	59
3.5	Séries de Fourier multiples . . . . .	61
3.6	La formule sommatoire de Poisson . . . . .	62
<b>4</b>	<b>MESURES POSITIVES</b>	<b>65</b>
4.1	Premiers faits . . . . .	65
4.2	Convergence faible des mesures . . . . .	66
4.3	Convergence étroite des mesures . . . . .	68
4.4	Fonctions de type positif . . . . .	70
4.4.1	Suites de type positif . . . . .	70
4.4.2	Le théorème de Bochner . . . . .	71
<b>5</b>	<b>DISCRETISATION</b>	<b>75</b>
5.1	La transformation de Fourier discrète . . . . .	75
5.2	La transformation de Fourier rapide . . . . .	76
5.2.1	L'algorithme . . . . .	76
5.2.2	Une application . . . . .	77
5.3	Calcul numérique de coefficients de Fourier . . . . .	77
5.4	Echantillonnage – Théorème de Shannon . . . . .	78
5.5	Calcul numérique d'une transformée de Fourier . . . . .	81
<b>6</b>	<b>LA TRANSFORMATION DE HILBERT</b>	<b>83</b>
6.1	La transformation de Hilbert . . . . .	83
6.1.1	Définition et premières propriétés . . . . .	83
6.2	Action sur $L^p$ . . . . .	85
6.2.1	Interpolation d'opérations linéaires . . . . .	85
6.2.2	Application à la transformation de Hilbert . . . . .	88
6.3	La fonction conjuguée . . . . .	89
6.3.1	Fonction conjuguée . . . . .	89
6.3.2	Conséquences pour les sommes partielles . . . . .	91
6.4	Commentaires et compléments . . . . .	92
6.4.1	Compléments . . . . .	92
6.4.2	Commentaires . . . . .	94
<b>7</b>	<b>AUTRES GROUPES</b>	<b>95</b>
7.1	Groupes finis . . . . .	95
7.2	Les groupes $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ . . . . .	96
7.2.1	Le groupe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ . . . . .	98
7.2.2	Les fonctions de Rademacher, Walsh et Haar . . . . .	99
7.3	Autres groupes totalement discontinus . . . . .	101
7.3.1	Les entiers $\mathbf{p}$ -adiques . . . . .	102
7.4	Analyse harmonique sur $\mathbb{Q}_p$ . . . . .	103

7.4.1	Le corps $\mathbb{Q}_p$ . . . . .	104
7.4.2	Les caractères continus de $\mathbb{Q}_p$ . . . . .	104
7.4.3	Transformation de Fourier . . . . .	105
7.5	Le théorème de Pontryagine . . . . .	106
7.6	Le théorème de Hausdorff-Young . . . . .	106
7.6.1	Un autre théorème d'interpolation . . . . .	106
7.6.2	Le théorème de Hausdorff-Young . . . . .	107
<b>INDICATIONS BIBLIOGRAPHIQUES</b>		<b>109</b>
<b>INDEX</b>		<b>111</b>