– I –

Généralités

Dans ce chapitre, nous allons préciser quelques points fondamentaux qui seront souvent présents, en tant qu'outils, dans les phases de raisonnement abordées en Mathématiques, Statistique, Économétrie, ...

1 Les ensembles

Définition 1

Un **ensemble** E est une collection d'objets appelés **éléments**.

Exemple :

L'ensemble $\{0; 2; 5\}$ est constitué de trois éléments : 0, 2 et 5.

Dans la suite du chapitre, E désigne un ensemble.

Définition 2

1. La notation $x \in E$ signifie : x appartient à E. On dit aussi x est élément de E.
2. La notation $x \notin E$ signifie : x n'appartient pas à E ou x n'est pas élément de E.
3. La notation $\emptyset$ représente l'**ensemble vide**, qui n'a aucun élément.
4. Le quantificateur universel $\forall$ se lit « pour tout » ou « quelque soit ».
5. Le quantificateur existentiel $\exists$ se lit « il existe ».
6. Les symboles $|$ ou $/$ ou $:$ se lisent « tel que ».

EXEMPLE :

1. $\forall x \in \mathbb{R}$ signifie « pour tout x réel ».
2. $\exists x \geq 0$ signifie « il existe (au moins) un nombre x positif ».
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \geq 0, x^2+y \geq 0$ signifie « pour tout x réel et y positif, x^2+y est positif ».
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \geq 0 : x^2+y=0$ signifie « pour tout x réel, il existe un nombre y positif, tel que $x^2+y=0$.
5. $\{x \in \mathbb{N} : x < 2\}$ représente « l'ensemble des nombres entiers x tels que $x < 2$ ». Il s'agit donc de l'ensemble $\{0; 1\}$.
6. $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ est soit l'intervalle ouvert $]a, b[$ lorsque $a < b$, soit l'ensemble vide si $a \geq b$.

2 La logique

⚠ Une **assertion** P peut être vraie ou fausse. Il n'y a pas d'alternative. ⚠

EXEMPLE :

L'assertion P : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \geq 0 : x^2+y=0$ est fausse car cela nécessite $y=-x^2 \leq 0$. On se gardera bien de dire qu'elle est vraie pour certaines valeurs de x ($x=0$). Une assertion est à prendre dans sa globalité (ici on impose à x de parcourir $\mathbb{R}$).

Définition 1

Etant données deux assertions P et Q, on peut définir les assertions suivantes :

1. P et Q : signifie que les deux assertions P et Q sont vraies.
2. P ou Q : signifie que l'une au moins des deux assertions P ou Q est vraie.
3. *non* P : est la négation de P : si P est vraie (resp. fausse) alors *non* P est fausse (resp. vraie).
4. $P \Longrightarrow Q$: signifie que pour que Q soit vraie, il suffit que P le soit mais si P est fausse alors $P \Longrightarrow Q$ est vraie. On parle d'**implication**. L'assertion P s'appelle l'**hypothèse** et Q la **conclusion**. On dit que P est une **condition suffisante** (CS en abrégé) pour que Q soit vraie.
5. $P \Longleftarrow Q$: s'appelle la **réciproque** de l'assertion $P \Longrightarrow Q$. Elle correspond à $Q \Longrightarrow P$. On dit que P est une **condition nécessaire** (CN en abrégé) pour que Q soit vraie.
6. $P \Longleftrightarrow Q$: signifie que P est vraie si et seulement si Q est vraie, c'est à dire que l'on a à la fois $P \Longrightarrow Q$ et $P \Longleftarrow Q$. On parle d'**équivalence**.

☞ Méthode

Pour montrer que P est vraie, on pourra supposer que $nonP$ est vraie et arriver à une contradiction. On parle alors de **raisonnement par l'absurde** (voir l'exemple suivant).

Propriété 1

1. *non* (P et Q) équivaut à (*non* P) ou (*non* Q).
2. *non* (P ou Q) équivaut à (*non* P) et (*non* Q).
3. $P \Longrightarrow Q$ équivaut à (*non* P) ou Q.

Preuve : - 3.

Nous ne rentrerons pas trop dans les détails. Examinons les cas possibles :

P vraie, Q vraie :	Les deux assertions $P \Longrightarrow Q$ et « ($nonP$) ou Q » sont vraies.
P vraie, Q fausse :	Les deux assertions $P \Longrightarrow Q$ et « ($nonP$) ou Q » sont fausses.
P fausse :	Les deux assertions $P \Longrightarrow Q$ et « ($nonP$) ou Q » sont vraies.

❏

☞ Méthode

Pour établir que $P \Longrightarrow Q$ est vraie, on peut utiliser plusieurs approches :

❶ **raisonnement direct**. On suppose que P est vraie et en utilisant une successions d'implications et/ou équivalences, on cherche à obtenir Q.

❷ **raisonnement par l'absurde**. On suppose que P est vraie et que Q est fausse et on montre que cela entraine une contradiction.

❸ **raisonnement par contraposée**. Il est basé sur la propriété suivante : $P \Longrightarrow Q$ revient à $(nonQ) \Longrightarrow (nonP)$.

EXEMPLE :

Considérons la fonction f définie par $f(x) = -2x + 10$ et montrons que f est une fonction décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Il s'agit donc de montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$.

* « Raisonnement direct »
  Soient x et y réels. Montrons que $P \Longrightarrow Q$ avec $P : x < y$ et $Q : f(x) \geq f(y)$. On a

  $$x < y \Longrightarrow -2x > -2y \Longrightarrow -2x + 10 > -2y + 10 \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$$

  Donc f est décroissante.

* « Raisonnement par l'absurde »Ici, on ne considère que l'assertion $P : \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$.
  Supposons $nonP$: $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R} : x < y$ et $f(x) < f(y)$. Puisque $f(x) < f(y)$, alors on a $-2x + 10 < -2y + 10 \Rightarrow -2x < -2y \Rightarrow x > y$. Cela contredit $x < y$. Il n'existe donc pas x et y réels tels que $x < y$ et $f(x) < f(y)$, c'est à dire $nonP$ est faux donc P est vraie (f est décroissante).

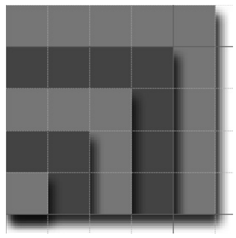
* « Raisonnement par contraposée »
  Il s'agit de montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ nonQ \Rightarrow nonP$ avec $P : x < y$ et $Q : f(x) \geq f(y)$. Autrement dit $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}$, montrons que $f(x) < f(y) \Longrightarrow x \geq y$. On a

  $$f(x) < f(y) \Longrightarrow -2x + 10 < -2y + 10 \Longrightarrow -2x < -2y \Longrightarrow x > y \Longrightarrow x \geq y$$

  d'où le résultat.

3 Raisonnement par récurrence

Les mathématiciens grecs de l'antiquité nommaient « nombres carrés » la suite de nombres définis par $u_n = n^2$ pour $n \geq 1$. Les figures ci-contre permettent de visualiser le phénomène puisque u_n est l'aire du carré de coté n. Ces représentations graphiques permettent également d'appréhender la propriété suivante : pour tout entier naturel $n \geq 1$, $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ mais ne constituent pas une preuve. Comment alors démontrer une telle propriété ?



Proposition 1 – « Démonstration par récurrence »

Soit une assertion P_n dépendant d'un entier naturel n. Si :

- Initialisation : l'assertion est vraie au rang k : P_k,
- Hérédité : Soit $n \geq k$. On suppose que l'assertion est vraie pour le rang n, alors elle est vraie au rang $n+1$: $P_n \Rightarrow P_{n+1}$,

alors l'assertion est vraie pour tout entier naturel $n \geq k$.

Exemple :
Montrons que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

1. Pour $n = 1$, P_1 : « $1 = 1^2$ » est bien vérifiée. L'assertion est alors vraie pour $n = 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons l'assertion vraie au rang n (P_n vraie) : $1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$. On a P_{n+1} : $1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2(n+1)-1) = n^2+(2n+1) = (n+1)^2$, en utilisant l'hypothèse de récurrence.
   Ainsi la propriété est vraie au rang $n + 1$

Conlusion : Pour tout $n \geq 1$, $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

Remarque:
⚠ Les deux points sont nécessaires au raisonnement. ⚠

En effet, si n est un entier naturel quelconque, et P_n la propriété « 6 divise $7^n + 1$ ».

Supposons cette propriété vraie au rang n, c'est à dire : $\exists p \in \mathbb{N}\ :\ 7^n+1 = 6p$. On a alors

$$7^{n+1} + 1 = 7 \times 7^n + 1 = 7 \times (7^n + 1) - 7 + 1 = 7 \times 6p - 6 = 6(7p - 1)$$

donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Cependant, la propriété n'est pas vraie pour $n = 0$, car $7^0 + 1 = 2$ n'est pas un multiple de 6, pas plus que $7^1 + 1 = 8$. Et on a bien du mal à trouver un entier k pour lequel cette propriété est vraie, alors qu'elle est héréditaire.

En fait la propriété est fausse pour tout entier naturel n. Cela reste à démontrer !

4 Contre-exemple

Le **contre-exemple** (Cex en abrégé) est utilisée pour prouver qu'une assertion est fausse. Il s'agit d'un exemple dont le but est de contrer la véracité d'une assertion.

⚠ Exhiber des exemples ne permet en aucun cas de justifier la véracité d'une assertion[1]. ⚠

C'est ainsi que Fermat conjectura que tous les nombres $F_n = 2^{2^n} + 1$ pour n entier naturel, sont premiers. Car effectivement sur quelques exemples ($n = 0, \ldots, n = 4$), on constate que les nombres F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4 sont premiers.

Mais c'est Euler qui prouva que cette assertion était fausse en exhibant un simple contre-exemple : $F_5 = 4\,294\,967\,297$ est divisible par 641.

[1]Pour être plus précis, il faudrait préciser que cela n'est plus vrai pour les prédicats existentiels. Pour montrer que : $\exists x \in \mathbb{Z}, : x^2 - 2x \geq -1$, il suffit de prendre l'exemple $x = -1$ (il existe donc bien une valeur de $x \in \mathbb{Z}$ qui convienne) alors que pour montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, : x^2 - 2x \geq -1$, exhiber des exemples ne sera en aucun cas un justification acceptable (on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$).

5 Exercices corrigés

Ex **1** Montrer que le carré d'un nombre impair est impair et réciproquement.

Ex **2** Montrer en raisonnant par l'absurde que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \frac{x+2}{x^2+1} \leq 3.$$

Rédiger également un raisonnement direct.

Ex **3** Montrer que le produit de deux fonctions impaires est une fonction paire.

Ex **4** Montrer que la proposition suivante est fausse :
« le produit de deux fonctions monotones sur un même ensemble E est monotone sur E ».

Ex **5** La proposition suivante est-elle vraie ou fausse :
« Soient $a \in \mathbb{R}$, f et g deux fonctions telles que $f(x) \xrightarrow{a} +\infty$ et $g(x) \xrightarrow{a} +\infty$. La limite du quotient $f(x)/g(x)$, si elle existe, est 0, 1 ou $+\infty$ ».

Ex **6** Soient x et y deux réels. Montrer que

$$x \neq y \Longrightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$$

Ex **7** Soient $m \in \mathbb{N}$. Montrer que : m pair $\Longleftrightarrow m^2$ pair.

Ex **8** Pour chaque proposition P qui suit, écrire sa négation puis, parmi les deux propositions P et $nonP$, démontrer laquelle est vraie ?

1. $\exists n \in \mathbb{N} : \forall p \in \mathbb{N},\ p \leq n.$
2. $\forall x \in \mathbb{R} : (2x-1)^2 > 0.$
3. $\forall x \in \mathbb{Z} : (2x-1)^2 > 0.$
4. $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 :$
   $a \geq b \Rightarrow (a+c \geq b+c).$
5. $\forall x \in \mathbb{N}^*\ 2x-1 > 0.$

Ex **9** Montrer en raisonnant par l'absurde que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \frac{2x+1}{x^2+12} \leq \frac{1}{3}.$$

Rédiger également un raisonnement direct.

Ex **10** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ex **11** Montrer que

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6} < \frac{7}{8} \cdots$$

6 Corrigés des Exercices

Ex **1** Montrons que m impair $\Longrightarrow m^2$ impair (CS).
(Raisonnement direct) Si m est impair alors $\exists\, p \in \mathbb{N} \,:\, m = 2p+1$ donc $m^2 = 4p^2 + 4p + 1$ est impair.
Il reste alors à montrer que m^2 impair $\Longrightarrow m$ impair (CN).
(Raisonnement par contraposée) Montrons que m pair $\Longrightarrow m^2$ pair. Si m est pair alors $\exists\, p \in \mathbb{N} \,:\, m = 2p$ donc $m^2 = 4p^2$ est pair.

Ex **2** Supposons que *nonP* est vraie, c'est à dire : $\exists\ x \in \mathbb{R},\ \frac{x+2}{x^2+1} > 3$. Puisque $x^2+1 > 0$, on a :

$$\frac{x+2}{x^2+1} > 3 \Leftrightarrow x+2 > 3x^2+3 \Leftrightarrow 3x^2 - x + 1 < 0$$

Or le discriminant du polynôme $\Delta < 0$ donc le polynôme n'a pas de racine et son signe est celui du coeff « a ». Donc $\forall\, x \in \mathbb{R},\ 3x^2 - x + 1 \geq 0$. Ce qui contredit : $\exists\ x \in \mathbb{R},\ 3x^2 - x + 1 < 0$ c'est à dire *nonP*. Donc P est vraie.
(Raisonnement direct) Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $x^2 + 1 > 0$, on a :

$$\frac{x+2}{x^2+1} \leq 3 \Leftrightarrow x+2 \leq 3x^2+3 \Leftrightarrow p(x) = 3x^2 - x + 1 \geq 0$$

Puisque le discriminant du polynôme $\Delta < 0$, il n'a pas de racine et son signe est celui du coeff « a ». Donc $\forall\, x \in \mathbb{R},\ 3x^2 - x + 1 \geq 0$.

Ex **3** Puisque f est impaire, le domaine de définition de f est symétrique par rapport à 0 (ie. $\forall\, x \in D_f,\ -x \in D_f$) et $\forall\, x \in D_f,\ f(-x) = -f(x)$. De même pour g. On a donc $D_{f\times g} = D_f \cap D_g$ est symétrique par rapport à 0 et $\forall\, x \in D_{f\times g},\ (f \times g)(-x) = f(-x)\, g(-x) = -f(x)\, (-g(x)) = (f \times g)(x)$

Ex **4** Cex : $f(x) = x,\ g(x) = x - 1,\ E = [0,1],\ fg$ décroît sur $[0; 1/2]$ puis croit.

Ex **5** Cex : $f(x) = b\, g(x)$ donne $b \in \mathbb{R}^+$.

Ex **6** En raisonnant par contraposée :

$$(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Longrightarrow xy+y-x-1 = xy-y+x-1 \Longrightarrow x = y$$

Ex **7** (CS) Si m est pair alors $\exists\, p \in \mathbb{N} \ :\ m = 2p \Longrightarrow m^2 = 4p^2$ donc m^2 pair.