■1■

Statique des fluides

PROPRIETES DES FLUIDES

ETATS DE LA MATIERE

Les trois états de la matière sont : état solide, état liquide, état gazeux.
Ils se distinguent par leurs propriétés :

- un solide possède une forme propre ;
- un liquide n'a de forme que celle de son contenant, mais son volume est défini ;
- un gaz n'a ni forme, ni volume propre.

C'est la température et donc l'agitation thermique qui permet de justifier ces propriétés. L'augmentation de température produit une augmentation de l'agitation des composants (atomes, molécules ; ions). Il est possible de se représenter ce qui se passe quand on augmente la température d'un corps :

- Dans le solide, les atomes, molécules et ions sont à des emplacements définis, autour desquels ils peuvent vibrer quand la température augmente. L'état est donc, en général, ordonné.
- Dans le liquide l'agitation a été suffisante pour rompre les liaisons fortes du solide, atomes, molécules et ions se déplacent librement. Cependant, il reste des liaisons intermoléculaires qui retiennent à faible distance les molécules ou atomes. Le volume est donc défini. L'état est désordonné.
- Dans le gaz les forces d'attraction sont très faibles et les molécules sont libres de se déplacer.

Les liquides et les gaz forment donc, par opposition aux solides les **fluides** : **à l'échelle macroscopique** (pour une observation à l'œil nu)**, ils présentent un aspect continu, déformable aisément, sans forme propre, et pouvant s'écouler**. C'est de cette dernière propriété que découle le nom fluide.

MASSE VOLUMIQUE, DENSITE, POIDS VOLUMIQUE

La **masse volumique** ρ d'un fluide est le rapport entre la masse d'une certaine quantité de matière, m et le volume occupé par cette quantité de matière V. Cette définition n'a de sens que si la matière est homogène.

$$\boxed{\rho = \frac{m}{V}} \text{ en kg.m}^{-3}$$

On peut définir la **densité**, par relation à un corps de référence. C'est le rapport entre la masse d'un certain volume du corps et la masse du même volume du corps de référence. En général, on utilise le rapport des masses volumiques.

- Pour les solides et les liquides, le corps de référence est l'eau pure (à 4°C, et p = 1,013 bar, sa masse volumique est ρ = 1000,00 kg.m^{-3}). En particulier pour les liquides, dont la masse volumique est plus sensible à la température, on choisit de la mesurer à 20°C. On parle alors de la densité d_4^{20}.
- Pour les gaz, le corps de référence est l'air sec, dans les mêmes conditions de température et de pression que le gaz étudié.

La densité, plutôt que de se référer à la masse volumique, se réfère souvent, alors, à la masse molaire.

Une mole de gaz occupe (à 0°, 1,013 bar) 22,4 L.

Une mole d'air a une masse M_{air} = 29 g, et la relation de définition de la densité du gaz de masse molaire M (en g) est alors :

$$\boxed{d = \frac{M}{29}} \; d \text{ n'a pas d'unité.}$$

On utilise assez souvent le **volume massique** v, inverse de la masse volumique :

$$\boxed{v = \frac{1}{\rho}} \text{ en m}^3\text{.kg}^{-1}.$$

Le **poids volumique** est le poids d'une unité de volume :

$$\boxed{\varpi = \frac{mg}{V} = \rho g} \text{ en N.kg}^{-1}.$$

COMPRESSIBILITE

La compressibilité est la propriété d'un corps de se déformer sous l'action d'une variation d'une grandeur externe. On distingue compressibilité isotherme (à température constante), compressibilité isochore (à volume constant) et compressibilité isobare (à pression constante).

Compressibilité isotherme

Les gaz sont fortement compressibles, et l'étude de cette compressibilité fait généralement partie de la thermodynamique. À température constante, par exemple, la pression absolue du gaz et le volume d'une masse définie varient en sens inverses (c'est la loi de Mariotte : $p.V$ = Constante). L'écoulement des fluides compressibles relève de l'étude de la thermodynamique.

Les liquides sont peu compressibles.
On définit le coefficient de compressibilité isotherme χ par la relation :

$$\boxed{V_2 = V_1.(1 - \chi.\Delta p)}$$

où V_2 est le volume final, V_1, le volume initial, Δp la variation de pression ($\Delta p = p_2 - p_1$) en pascal (Pa), χ le coefficient de compressibilité en Pa^{-1}.
Le signe – vient de ce qu'en augmentant la pression, le volume diminue, et qu'on souhaite garder un coefficient positif.
Cette relation peut encore s'écrire :

$$\boxed{\Delta V = -\chi.V.\Delta p}$$

avec $\Delta V = V_2 - V_1$. Pour les liquides χ est de l'ordre de 10^{-10} Pa^{-1}.

Dilatation isobare
On définit le coefficient de dilatation volumique isobare α par la relation :

$$\boxed{V_2 = V_1.(1 + \alpha.\Delta\theta)}$$

Où V_2 est le volume, V_1, le volume initial, $\Delta\theta$ la variation de température ($\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$) en ° (La différence entre deux températures est la même, qu'on opère en °C ou en Kelvin), α le coefficient de dilatation volumique en K^{-1} ou $°C^{-1}$.
Cette relation peut encore s'écrire :

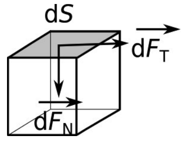
$$\boxed{\Delta V = \alpha.V.\Delta\theta}$$

avec $\Delta V = V_2 - V_1$

PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA STATIQUE DES FLUIDES

LA PRESSION

Soit un élément de volume d'un fluide, limité supérieurement par une surface dS. Sur cette surface élémentaire s'exercent des actions de l'extérieur, qu'on peut modéliser par deux forces élémentaires, $d\vec{F_T}$, tangentielle et $d\vec{F_N}$, normale à la surface. La force tangentielle ne s'exerce que dans les situations de mouvement, et nous nous intéresserons plus tard à elle.



La pression est définie comme le quotient de la force normale par la surface :

$$\boxed{p = \frac{\mathrm{d}F_N}{\mathrm{d}S}}$$

La pression est une grandeur scalaire, et ne dépend pas de l'orientation de la surface.

Unités de mesure

L'unité légale découle de la définition : c'est le pascal (Pa) qui vaut $1\mathrm{N/m^2}$.
Comme elle est très petite, on utilise plutôt ses multiples, le kPa et le Mpa.
Le bar est une unité autorisée : $1\mathrm{bar} = 10^5$ Pa = 0,1 MPa. Il correspond en gros à la pression atmosphérique au niveau de la mer.
Les météorologues utilisaient le mbar pour leurs mesures (cela correspond à la précision qu'ils choisissent). Ils l'ont remplacé par l'hectopascal (hPa) qui lui est égal.

Des unités anciennes et exotiques subsistent :

- 1 $\mathrm{kgf/cm^2}$ = 98066 Pa : c'est le « kilo » des indicateurs de pression des pneus ;
- 1 atm = 101325 Pa = 1,01325 bar : l'atmosphère ;
- 1 $\mathrm{mm_{Hg}}$ = 133,32 Pa = 1/760 atm ;
- 1 torr = 1 $\mathrm{mm_{Hg}}$, utilisé pour le vide ;
- 1 $\mathrm{m_{CE}}$= 9806,65 Pa : 1 m de colonne d'eau, utilisé en tuyauterie ;
- 1 PSI = $1\mathrm{lb/in^2}$ = 6894,8 Pa unité anglo–saxonne (pound per square inch).

Différentes mesures de pressions

Ces pressions font référence à des mesures obtenues avec différents appareils. Certains mesurent une pression seule : pression absolue ou pression atmosphérique, d'autres mesurent une différence de pression entre deux points quelconque, ou entre un point et l'atmosphère.
La **pression absolue** p_{abs} se mesure en référence au vide absolu dont la pression est nulle.
La **différence de pression** ou **pression différentielle** $\Delta p = p_2 - p_1$ se mesure entre 2 points. En général $p_{\mathrm{dif}} = p_{\mathrm{abs}} - p_{\mathrm{ref}}$ où p_{ref} est une pression de référence.
La **pression atmosphérique ambiante** p_{amb} ou p_{atm} est mesurée avec un baromètre par rapport au vide absolu.
La **pression effective** p_{eff} ou **pression relative** p_{rel} est la pression différentielle mesurée en référence à la pression ambiante. On a donc :

$$p_{\mathrm{eff}} = p_{\mathrm{abs}} - p_{\mathrm{atm}}.$$

Pression à l'air libre

Dans les problèmes, on rencontre souvent un réservoir, ou un point à l'air libre. Ça signifie que sa pression est égale à la pression atmosphérique définie pour le problème.

RELATION FONDAMENTALE DE L'HYDROSTATIQUE

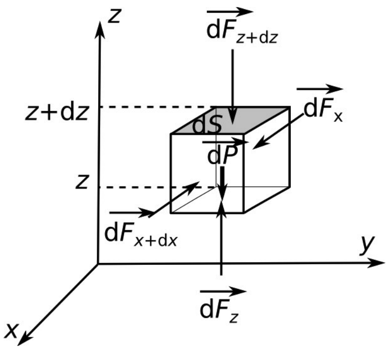
La pression en un point d'un fluide au repos dépend des forces que subit le fluide, et en particulier du champ de forces. Le seul champ de forces que nous traiterons est le champ de pesanteur. Par convention, nous orienterons toujours l'axe Oz vers le haut.

Nous prenons ici l'exemple d'un élément parallélépipédique, situé en (x, y, z), de dimensions (dx, dy, dz), orienté suivant les 3 axes : on a donc $dS_x = dS_{x+dx}$, $dS_y = dS_{y+dy}$, $dS_z = dS_{z+dz}$. Sa masse est $dm = \rho.dV$, avec $dV = dS_z.dz$.

Forces à distance

La seule force à distance est le poids, vertical vers le bas :

$$dP = dm.g = \rho.dV.g = \rho.\, dS_z.dz.g$$



Forces de contact

Exercées sur les surfaces :

Sur chaque surface s'exerce une force de pression de norme :

$$dF_x = p_x.dS_x \qquad dF_{x+dx} = p_{x+dx}.dS_x$$
$$dF_y = p_y.dS_y \qquad dF_{y+dy} = p_{y+dy}.dS_y$$
$$dF_z = p_z.dS_z \qquad dF_{z+dz} = p_{z+dz}.dS_z$$

Bilan

Les forces de pressions exercées sur les surfaces verticales se compensent deux à deux.

- Selon Ox, $\qquad d\vec{F}_x = -\, d\vec{F}_{x+dx}$

soit $\qquad dF_x = dF_{x+dx}$

ou $\qquad p_x.dS_x = p_{x+dx}.dS_x$

et on peut en déduire que $\qquad p_x = p_{x+dx}$

et donc $\qquad p_y = p_{y+dy}$.

- La relation serait la même selon Oy.

Dans un fluide au repos, la pression est la même en tout point d'un plan horizontal.

En conséquence, la surface libre d'un liquide au repos, qui est à la pression atmosphérique est un plan horizontal.

Il reste selon Oz $\qquad d\vec{F}_z + d\vec{F}_{z+dz} + d\vec{P} = \vec{0}$

Soit $\qquad p_{z+dz}.\, dS_z - p_z.\, dS_z = -\,\rho.g.\, dS_z\, .dz$

On peut simplifier par dS_z

$$p_{z+dz} - p_z = -\,\rho.g.dz$$

On peut appeler dp cette variation de p et donc

$$\boxed{dp = -\,\rho.g.dz} \text{ ou } \boxed{\frac{dp}{dz} = -\,\rho.g}$$

Cette équation est la *forme différentielle* de la **relation fondamentale de la statique des fluides** (ou hydrostatique) dans le champ de pesanteur.

La grandeur $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}$ est appelée gradient de la pression. Le signe – est lié au fait que g est en sens inverse de z et que la pression augmente avec le champ de gravitation.

En intégrant la relation : $\mathrm{d}p = -\rho.g.dz$

on obtient : $\Delta p = \int \mathrm{d}p = p_2 - p_1 = -g.\int \rho.\mathrm{d}z$

et si ρ est constant on a :

$$\boxed{\Delta p = p_2 - p_1 = -\rho.g(z_2 - z_1) = \rho.g(z_1 - z_2)}$$

forme intégrale de la relation fondamentale de la statique des fluides.

On peut aussi l'écrire : $\boxed{\Delta p = -\rho.g.\Delta z}$

En choisissant : $z_1 = 0, z_2 = z, p_1 = p_0, p_2 = p$

la relation peut aussi s'écrire :

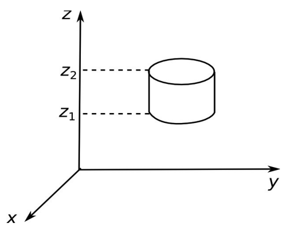
$$\boxed{p = p_0 - \rho.g.z}$$

Dans un fluide continu au repos, la différence de pression entre deux niveaux est mesurée par le poids de la colonne de fluide ayant pour surface de base l'unité et pour hauteur la distance entre ces deux niveaux.

FORCE D'ARCHIMEDE

La force à étudier porte le nom de Poussée d'Archimède, ou Force d'Archimède. Archimède l'a découverte pour résoudre un problème posé par le roi Denys de Syracuse, qui pensait que la couronne faite par son orfèvre n'était pas en or pur.

Soit un solide immergé dans un fluide homogène, de masse volumique ρ_L. De la part du fluide, il est soumis à une force, due aux pressions exercées sur sa surface. Cette force est indépendante de la nature du solide.



Si, on remplace ce solide par un volume identique du liquide (on peut imaginer que le liquide se solidifie sans changer ses autres propriétés), la poussée d'Archimède que subit le liquide est la même. Ce volume de liquide est, lui, en équilibre, puisqu'il est de même nature que son environnement. Il est soumis à deux forces : son poids, et la poussée d'Archimède.

Donc, la poussée d'Archimède est l'opposé du poids du liquide.

Le théorème d'Archimède s'énonce ainsi :

Tout corps plongé dans un fluide subit de la part de ce fluide une poussée opposée au poids du volume de fluide qu'il déplace (ou remplace).

Ce poids se calcule simplement : le volume déplacé est V_{imm}, la masse en est donc $m = \rho_L.V_{\mathrm{imm}}$ et le poids est $P = \rho_L.V_{\mathrm{imm}}.g$. La poussée d'Archimède F_A a même intensité :

$$\boxed{F_A = \rho_L.V_{imm}.g}$$

EQUILIBRE D'UN CORPS IMMERGE

Un corps immergé est soumis à deux forces, son poids, et la poussée d'Archimède. On appelle poids apparent P_{app} la résultante de ces deux forces (colinéaires et de sens opposés). Le comportement du corps dépendra donc du signe de ce poids apparent :

- Si $P_{app} > 0$, le corps s'élève dans le fluide, et va flotter.
- Si $P_{app} = 0$ l'équilibre est indifférent.
- Si $P_{app} < 0$, le corps s'enfonce dans le fluide.

La flottaison correspond à une immersion partielle d'un volume du corps tel que la poussée d'Archimède sur la partie immergée de ce volume équilibre le poids du corps.

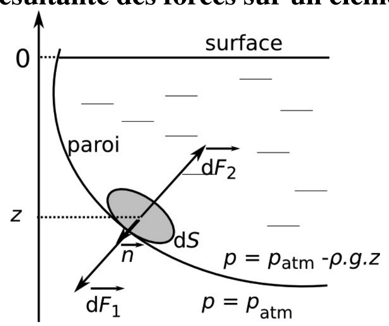
CENTRE DE POUSSEE

La poussée, répartie sur l'ensemble de la surface de contact entre le fluide et le corps peut se sommer en une force unique dont le point d'application, ou centre de poussée est situé au centre de gravité du volume de fluide déplacé. Pour un navire, ce centre de poussée est appelé centre de carène.
L'équilibre d'un corps flottant dépend de la position relative de ce centre de carène et du centre de gravité du corps. Si le centre de gravité est placé plus bas que le centre de carène, l'équilibre du corps est assuré (il ne risque pas de se renverser) ; on obtient ce résultat en lestant le corps.

FORCES DE PRESSION

BILAN DES FORCES SUR UN RECIPIENT

Résultante des forces sur un élément de paroi



Soit un élément de paroi situé dans un fluide à la profondeur h, donc de cote z, négative :

$$h = -z$$

L'élément de paroi de surface dS subit deux forces élémentaires, exercées, l'une par le fluide, l'autre par l'atmosphère extérieure.

La relation de définition de la pression permet d'écrire :

$$\mathrm{d}\vec{F}_1 = p.\mathrm{d}S.\vec{n}$$

$\vec{n}$ est le vecteur unitaire de la perpendiculaire à la surface ; il est orienté vers l'extérieur. Il donne la direction et le sens de la force élémentaire.
La force extérieure s'écrit :

$$\mathrm{d}\vec{F}_2 = -p_{\mathrm{atm}}.\mathrm{d}S.\vec{n}\ .$$

La résultante de ces deux forces est dirigée vers l'extérieur et vaut :

$$\mathrm{d}F = -\rho.g.z.\mathrm{d}S.$$

Comme $$h = -z$$

$$\mathrm{d}F = \rho.g.h.\mathrm{d}S.$$

Le liquide subit de la part de la paroi une force de même norme et de sens opposé (principe des actions réciproques).

Résultante sur l'ensemble des parois

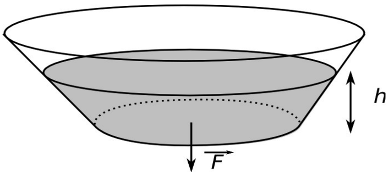
Considérons l'équilibre du fluide contenu dans le récipient. Il est soumis à 2 forces : son poids $\vec{P}$ et la résultante des forces exercées par les parois, $\vec{F}'$. Il est en équilibre, donc :

$$\vec{P} = -\vec{F}'\ .$$

Comme $\vec{F}'$ est l'opposé de la force $\vec{F}$ exercée par le fluide sur l'ensemble des parois, on, peut écrire que cette force est donc égale au poids du fluide :

$$\vec{F} = \vec{P}$$

Résultante sur le fond



Sur le fond horizontal, la résultante est verticale. Sa norme est donnée par :

$$F = \int \rho.g.h.\mathrm{d}S = \rho.g.S.h$$

C'est le poids du volume de liquide contenu dans le cylindre de génératrice verticale appuyé sur la surface de base. Cette force n'est égale au poids que dans le cas d'un vase cylindrique.