Logique pure

1 Logique formelle

RL&M Fréquence ●●●●● Difficulté ★★★★☆

VOCABULAIRE ET NOTIONS DE BASE

1. On appelle **A** un événement ou une situation et $\overline{\mathbf{A}}$ la négation de l'événement A.
Exemple : Soit A : « Il pleut » et $\overline{A}$: « Il ne pleut pas ».

2. « **A implique B** » ($A \rightarrow B$) si **la réalisation de A entraîne la réalisation de B**.
En d'autres termes, on peut affirmer : « **Si A est vrai, alors B est aussi forcément vrai** ».
Exemple : Soit A : « Il pleut » ; soit B : « Je suis mouillé ».
$A \rightarrow B$ se lit : « S'il pleut, alors je suis forcément mouillé ».

> **ATTENTION** Le mot « **forcément** » est crucial. En logique, il n'y a pas d'alternative possible à une implication. S'il pleut, alors je suis **forcément** mouillé. Je ne peux pas m'abriter pour éviter la pluie par exemple.

ÉQUIVALENCE LOGIQUE FONDAMENTALE

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathbf{B}} \rightarrow \overline{\mathbf{A}}$$

Si A implique B, alors si B est faux, A est forcément faux.

Exemple : Mes parents me disent : « Si tu as HEC, alors tu auras une voiture ».
On appelle A : « Avoir HEC » et B : « Avoir une voiture ». On a alors : $A \rightarrow B$.

L'équivalence $\overline{\mathbf{B}} \rightarrow \overline{\mathbf{A}}$ signifie : « Si je n'ai pas de voiture, alors c'est que je n'ai pas eu HEC ».
En effet, si j'avais eu HEC, alors j'aurais (forcément) eu une voiture.

> **ATTENTION** **Erreur classique : Ne PAS conclure que si $A \rightarrow B$, alors $\overline{A} \rightarrow \overline{B}$.**
> Dans l'exemple ci-dessus, il se peut que je n'aie pas HEC mais que je reçoive tout de même une voiture. En effet, je peux très bien me faire offrir une voiture sans avoir eu HEC.
> Je sais simplement que si je n'ai pas de voiture, c'est que je n'ai pas eu HEC.
> Dans le cas contraire, mes parents m'auraient **forcément** offert une voiture.

LES PRINCIPES DE LOGIQUE FORMELLE

Principe	Explication	Exemple
Double négation	La négation de « $\overline{A}$ » est A.	La négation de « Il ne pleut pas » est « Il pleut ».
Transitivité	Si A → B **et** B → C, alors A → C.	S'il pleut (A), alors je suis mouillé (B). Si je suis mouillé (B), alors j'ai froid (C). Donc, s'il pleut (A), alors j'ai froid (C) .

LES LOIS DE MORGAN

Principe	Explication	Exemple
$\overline{\textbf{A et B}} \Leftrightarrow \overline{\textbf{A}}$ ou $\overline{\textbf{B}}$	« A **et** B » n'est plus vrai dès que l'un des deux éléments n'est plus vrai. $\overline{\text{A } \textbf{et} \text{ B}}$ signifie donc que soit A, soit B, soit les 2 ne sont pas réalisés.	La **négation** de « Arnaud a une voiture rouge et une voiture bleue » **n'est pas** « Arnaud n'a ni une voiture rouge ni une voiture bleue » **mais** « Arnaud n'a pas de voiture rouge » ou « Arnaud n'a pas de voiture bleue ».
$\overline{\textbf{A ou B}} \Leftrightarrow \overline{\textbf{A}}$ et $\overline{\textbf{B}}$	$\overline{\text{A } \textbf{ou} \text{ B}}$ signifie que ni A ni B ne sont vrais.	La **négation** de « Arnaud a une voiture rouge ou une voiture bleue » **est** « Arnaud n'a **ni** une voiture rouge **ni** une voiture bleue ».

ASTUCES

La négation de	Est	Et non	Exemple
Tous	**Au moins 1**	**Aucun**	La **négation** de « Tous les chats sont gris » est : « Au moins un chat n'est pas gris » et non « Aucun chat n'est gris ».
Certains **Au moins 1**	**Aucun**	**Certains**	La **négation** de « Certains chats sont gris » est : « Aucun chat n'est gris » et non « Certains chats ne sont pas gris ». Idem pour « Au moins 1 ».
A > B	**B ≥ A**	**B > A**	La **négation** de « Alexandre est plus riche que Bernard » est « Alexandre est moins riche ou aussi riche que Bernard » et non « Alexandre est moins riche que Bernard ».

2 Menteur/Vérité

RL&M Fréquence ●●●●● Difficulté ★★★★☆

TABLEAU D'ÉQUIVALENCES

Type de personne	Propos tenu	Conclusion
Vérité	« Il/elle dit la vérité »	La personne dit vraiment la vérité
	« Il/elle ment »	La personne ment vraiment
Menteur	« Il/elle dit la vérité »	La personne ment
	« Il/elle ment »	La personne dit la vérité

ASTUCES

1. Remplacez les « Vérité » et « Il/Elle dit la vérité » par « + » et les « Menteur » et « Il/Elle ment » par « - ». Puis, multipliez **« type de personne »** × **« Propos tenu »** = **« Conclusion »**.
   Exemple : « – » × « – » = « + » : Un menteur qui accuse quelqu'un de mentir désigne en fait quelqu'un qui dit la vérité.
2. La réalité est toujours le contraire des propos tenus par un menteur.
3. La réalité correspond toujours aux propos tenus par une personne honnête (Vérité).

MÉTHODE DES IMPLICATIONS SUCCESSIVES

Pour trouver la solution, on peut raisonner grâce à la logique formelle (voir la fiche « Logique formelle »).

Cette méthode est utile pour les énoncés qui donnent **des informations en fonction d'autres informations**. **Exemple :** Si Arnaud ment, alors Joachim dit la vérité.

Application ★★★★★ **45 sec. – 3 min.**

Dans une queue de 27 personnes devant un cinéma, chacun affirme que son voisin de devant ment, sauf le premier qui affirme que tous ceux de derrière lui mentent.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

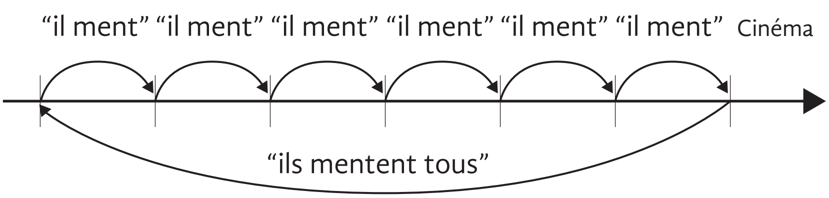
(A) Dans cette queue, il y a plus de gens qui mentent que de gens qui disent la vérité.

(B) Dans cette queue, il y a plus de gens qui disent la vérité que de gens qui mentent.

(C) Cette configuration de queue est impossible.

(D) Si le 1er ment en disant « Tous ceux derrière moi mentent », cela signifie qu'ils disent tous vrai.

Étape 1 **Schématisons l'énoncé.**



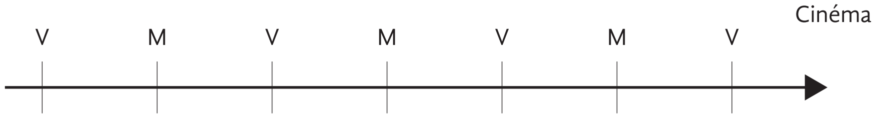
ASTUCE Ne représentez pas 27 personnes. Contentez-vous d'un nombre impair. **Exemple :** 7.

Étape 2 **Choisissons une hypothèse et supposons-la vraie. C'est le postulat de départ.**

Ici, supposons que la personne en bout de file (la plus loin du cinéma) dit la vérité.

Étape 3 **En partant de ce postulat, avançons d'implication en implication.**

Si la personne en bout de file dit la vérité, alors le suivant dans la file ment vraiment (puisque quelqu'un qui dit la vérité l'accuse de mentir).
Cela signifie que le suivant dit la vérité (puisqu'un menteur l'accuse de mentir), etc.



Étape 4 **Concluons.**

Avec ce postulat, on aboutit à une **contradiction.** En effet, le 1er de la file est censé dire vrai. Cela signifie que tout le monde derrière lui devrait mentir (énoncé), ce qui n'est pas le cas (M-V-M-etc.).
On comprend donc que **notre postulat de départ** (la personne en bout de file dit la vérité) **était faux**. **Cela signifie que cette personne ment**. Ainsi, le schéma correct est :

Il y a donc 1 personne sur 2 qui ment, incluant la dernière et la première, soit 4 personnes sur 7.
Sur 27 personnes, il y aura donc 13 + 1 = **14 menteurs et 13 vérité. VFFF.**

REMARQUE Si le 1er ment en disant « Tous ceux derrière moi mentent », cela signifie qu'**au moins un derrière dit vrai** et non qu'ils disent tous vrai.

MÉTHODE DES PROPOS CONTRADICTOIRES

Pour trouver la solution, on peut confronter des propos contradictoires. Cette méthode est utile pour les énoncés qui donnent **plusieurs informations à la suite.**

Exemple : Les propos « Cette voiture est rouge » et « cette voiture n'est pas rouge » sont contradictoires, c'est-à-dire que si l'un est vrai, l'autre est nécessairement faux.

Application 1 ★★★★☆ 45 sec. – 3 min.

5 boîtes opaques affichent chacune un message. 1 seule renferme un trésor. 2 messages sur 5 sont faux.

– Boîte bleue : Le trésor est dans cette boîte.
– Boîte rouge : Cette boîte ne renferme pas de trésor.
– Boîte verte : Le trésor est dans la boîte jaune.
– Boîte jaune : Le trésor n'est ni dans la boîte bleue ni dans la boîte noire.
– Boîte noire : Le message de la boîte rouge est faux.

À partir des informations ci-dessus, on peut conclure que :

(A) Le trésor est dans la boîte rouge.
(B) Le trésor est dans la boîte bleue.
(C) Le message affiché par la boîte verte est vrai.
(D) Le trésor est dans la boîte jaune.

Étape 1 Identifions les propos contradictoires.

2 paires de propos sont contradictoires :

1re paire : La boîte bleue et la boîte jaune. **2e paire :** La boîte rouge et la boîte noire.

Étape 2 Déduisons-en quelles boîtes affichent un message faux.

Les 2 boîtes affichant un message faux se trouvent nécessairement parmi ces 4 boîtes.
En effet, dans une paire de propos contradictoires, **si l'un est vrai alors l'autre est forcément faux,** donc sur les 2 paires, il y a 2 messages faux (et 2 messages vrais).

Étape 3 Concluons.

La dernière boîte (la verte) affiche donc un message juste. Ce qui est écrit dans la boîte verte est donc vrai. Le trésor est donc dans la boîte jaune. **FFVV.**

MENTEURS ET CALENDRIERS

Dans certains énoncés, la nature d'une même personne (vérité ou menteur) évolue au fil de la semaine. Pour résoudre ces questions, réalisez **un calendrier de la semaine** qui indique si la personne ment (M) ou dit la vérité (V).

	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
Pers. 1	M ou V	M ou V	M ou V	M ou V	M ou V	M ou V	M ou V
Pers. 2	M ou V	M ou V	M ou V	M ou V	M ou V	M ou V	M ou V

Application 2 ★★★☆☆ 30 sec. – 2 min.

Valentin ment le lundi, le mardi et le mercredi, mais dit la vérité le reste de la semaine.
Il dit à Chloé : « Hier j'ai menti » et « Je mentirai encore deux jours après demain ».
À partir des informations ci-dessus, on peut conclure que :

(A) Nous sommes lundi.
(B) Nous sommes mardi.
(C) Nous sommes mercredi.
(D) Nous sommes jeudi.

Étape 1 Synthétisons les informations de l'énoncé dans un calendrier.

Jour	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche
Valentin	M	M	M	V	V	V	V

Étape 2 Utilisons la 1re information.

Ici, trouvons les jours qui vérifient « Hier j'ai menti »
Seuls lundi et jeudi conviennent. En effet, le jeudi, Valentin dit vrai, il a donc bien menti le mercredi. Sur le même modèle, le lundi, Valentin ment. Il a donc bien dit la vérité dimanche.