Chapitre I

NOMBRE, VARIABLE, FONCTIONS

§ 1. Nombres réels. Représentation des nombres réels par les points de l'axe numérique

La notion de nombre est l'une des plus fondamentales des mathématiques. Elaborée dans l'Antiquité, elle a subi au cours des siècles un long processus d'extension et de généralisation.

Les nombres entiers, les nombres fractionnaires positifs et négatifs, avec le nombre zéro sont appelés *nombres rationnels.* Tout nombre rationnel peut être mis sous la forme du quotient $\frac{p}{q}$ de deux nombres entiers p et q. Par exemple:

$$\frac{5}{7}; \quad 1{,}25 = \frac{5}{4}.$$

En particulier, tout nombre entier p peut être considéré comme le quotient des deux nombres entiers p et $1 : \frac{p}{1}$. Par exemple:

$$6 = \frac{6}{1}; \quad 0 = \frac{0}{1}.$$

Les nombres rationnels peuvent être mis sous la forme de fractions décimales périodiques, limitées ou illimitées.

Les nombres exprimés par les fractions décimales illimités non périodiques sont appelés *nombres irrationnels*; tels sont, par exemple, les nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $5 - \sqrt{2}$, etc.

La collection des nombres rationnels et irrationnels forme l'ensemble des nombres *réels.* Les nombres réels constituent un ensemble ordonné, c'est-à-dire que, pour chaque couple de nombres réels x et y, une et seulement une des relations suivantes

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y$$

est satisfaite.

Les nombres réels peuvent être représentés par les points de l'axe numérique. On appelle *axe numérique* une droite infinie sur laquelle on a choisi : 1) un point O appelé origine, 2) un sens positif, que l'on indique par une flèche, et 3) une unité de mesure. Le plus souvent nous disposerons l'axe horizontalement et choisirons la direction de gauche à droite comme sens positif.

Si le nombre x_1 est positif, nous le représenterons par le point M_1 situé à droite de l'origine et distant de O de $OM_1 = x_1$; de même si le nombre x_2 est négatif, nous le représenterons par le point M_2 situé à gauche de O et distant de O de $OM_2 = -x_2$ (fig. 1).

Le point O représente le nombre zéro. Il est évident que tout nombre réel est représenté par un seul point de l'axe numérique. A deux nombres réels distincts correspondent deux points différents

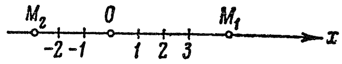

Fig. 1

de l'axe numérique. La proposition suivante est vraie : chaque point de l'axe numérique est l'image d'un seul nombre réel (rationnel ou irrationnel).

Ainsi il existe une correspondance biunivoque entre tous les nombres réels et tous les points de l'axe numérique : à chaque nombre correspond un point unique et inversement à chaque point correspond un seul nombre dont il est l'image. Cela permet dans de nombreux raisonnements d'employer indifféremment la notion de « nombre x » ou celle de « point x ». Dans ce manuel nous aurons fréquemment l'occasion de mettre cette remarque à contribution.

Indiquons, sans la démontrer, la propriété suivante relative à l'ensemble des nombres réels : *entre deux nombres réels quelconques, il existe toujours des nombres rationnels et des nombres irrationnels.* Géométriquement cela signifie : *entre deux points quelconques de l'axe numérique, il existe toujours des points rationnels et des points irrationnels.*

En guise de conclusion, citons le théorème suivant qui joue, en quelque sorte, le rôle d'un « pont jeté entre la théorie et la pratique ».

Théorème. *Tout nombre irrationnel α peut être exprimé avec le degré de précision voulu à l'aide de nombres rationnels.*

En effet, soit α un nombre irrationnel positif. Proposons-nous d'évaluer la valeur approchée de α à $\frac{1}{n}$ près (par exemple, à $\frac{1}{10}$ près, à $\frac{1}{100}$ près, etc.).

Quel que soit le nombre α, il est inclus entre deux nombres entiers consécutifs N et $N+1$. Partageons le segment compris entre N et $N+1$ en n parties égales. Alors α se trouvera inclus entre deux nombres rationnels $N+\frac{m}{n}$ et $N+\frac{m+1}{n}$. La différence entre ces deux nombres étant égale à $\frac{1}{n}$, chacun d'eux exprimera α avec la précision voulue, le premier par défaut, le second par excès.

Exemple. Le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ s'exprime à l'aide des nombres rationnels:

$$1{,}4 \text{ et } 1{,}5 \text{ à } \frac{1}{10} \text{ près,}$$

$$1{,}41 \text{ et } 1{,}42 \text{ à } \frac{1}{100} \text{ près,}$$

$$1{,}414 \text{ et } 1{,}415 \text{ à } \frac{1}{1000} \text{ près, etc.}$$

§ 2. Valeur absolue d'un nombre réel

Introduisons maintenant la notion de valeur absolue d'un nombre réel.

Définition. On appelle *valeur absolue* (*ou module*) d'un nombre réel x (noté $|x|$) le nombre réel non négatif qui satisfait aux conditions suivantes:

$$|x| = x \quad \text{si } x \geqslant 0;$$
$$|x| = -x \quad \text{si } x < 0.$$

Exemples: $|2| = 2$; $|-5| = 5$; $|0| = 0$.

Il découle de cette définition que pour tout x on a $x \leqslant |x|$.

Voyons quelques propriétés de la valeur absolue.

1. *La valeur absolue de la somme algébrique de plusieurs nombres réels n'est pas supérieure à la somme des valeurs absolues des termes*

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

Démonstration. Soit $x + y \geqslant 0$, alors

$$|x + y| = x + y \leqslant |x| + |y| \quad (\text{car } x \leqslant |x| \text{ et } y \leqslant |y|).$$

Soit $x + y < 0$, alors

$$|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) \leqslant |x| + |y|,$$

c.q.f.d.

La démonstration peut être facilement étendue au cas d'un nombre quelconque de termes.

Exemples:

$$|-2 + 3| < |-2| + |3| = 2 + 3 = 5 \text{ ou } 1 < 5,$$
$$|-3 - 5| = |-3| + |-5| = 3 + 5 = 8 \text{ ou } 8 = 8.$$

2. *La valeur absolue de la différence n'est pas inférieure à la différence des valeurs absolues des termes*:

$$|x - y| \geqslant |x| - |y|, \quad |x| > |y|.$$

Démonstration. Posons $x - y = z$, alors $x = y + z$ et d'après la propriété précédente

$$|x| = |y + z| \leqslant |y| + |z| = |y| + |x - y|,$$

d'où

$$|x| - |y| \leqslant |x - y|,$$

c.q.f.d.

3. *La valeur absolue du produit est égale au produit des valeurs absolues des facteurs*:

$$|xyz| = |x|\,|y|\,|z|.$$

4. *La valeur absolue du quotient est égale au rapport des valeurs absolues du dividende et du diviseur*:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Les deux dernières propriétés découlent immédiatement de la définition de la valeur absolue.

§ 3. Grandeurs variables et grandeurs constantes

Quand nous mesurons certaines grandeurs physiques telles que le temps, la longueur, la surface, le volume, la masse, la vitesse, la pression, la température, etc., nous établissons les valeurs numériques de ces grandeurs physiques. Les mathématiques étudient les grandeurs sans tenir compte de leur contenu concret. Dans ce qui suit, quand nous parlerons de grandeur, nous aurons en vue ses valeurs numériques. Durant différents phénomènes certaines grandeurs varient, c'est-à-dire qu'elles sont susceptibles de prendre diverses valeurs numériques; au contraire, d'autres peuvent conserver une même valeur numérique. Ainsi, si un point matériel se déplace suivant un mouvement uniforme, le temps et la distance varient, tandis que la vitesse reste constante.

On appelle *grandeur variable* ou *variable* une grandeur susceptible de prendre différentes valeurs numériques. Une grandeur dont les valeurs numériques ne changent pas est appelée *grandeur constante* ou *constante*. Par la suite, nous désignerons les grandeurs variables par les lettres $x, y, z, u, \ldots$, etc., et les grandeurs constantes par les lettres $a, b, c, \ldots$, etc.

Remarque: En mathématiques on considère souvent les grandeurs constantes comme un cas particulier des grandeurs variables: une constante est une variable dont les diverses valeurs numériques sont toutes égales.

Remarquons, toutefois, qu'au cours de l'étude de divers phénomènes physiques il peut arriver qu'une même grandeur soit constante dans certains cas et variable dans d'autres. Par exemple, la vitesse d'un corps animé d'un mouvement uniforme est une grandeur constante, mais la vitesse d'un mouvement uniformément accéléré est une grandeur variable. Les grandeurs qui conservent une même valeur quel que soit le phénomène considéré sont appelées *constantes absolues*. Ainsi, le rapport de la longueur d'une circonférence à son diamètre est une constante absolue dont la valeur $\pi = 3{,}14159\ldots$

Nous verrons par la suite que la notion de grandeur variable est fondamentale pour le calcul intégral et différentiel. Dans « La dialectique de la nature » Engels écrit : « La grandeur variable de Descartes a marqué un tournant en mathématiques. C'est avec elle que le mouvement et la dialectique sont entrés dans les mathématiques et que se fit sentir tout de suite la nécessité du calcul différentiel et intégral. »

§ 4. Domaine de définition d'une variable

Une variable est susceptible de prendre des valeurs numériques différentes. L'ensemble de ces valeurs peut varier suivant le caractère du problème considéré. Par exemple, la température de l'eau chauffée dans les conditions normales peut varier depuis la température ambiante, 15 à 18 °C, jusqu'à celle du point d'ébullition, 100 °C. Par contre, la variable $x = \cos\alpha$ peut prendre toutes les valeurs comprises entre -1 et $+1$.

La valeur d'une variable s'exprime géométriquement par un point de l'axe numérique. Ainsi, l'ensemble des valeurs que prend la variable $x = \cos\alpha$ pour toutes les valeurs de α est représenté par l'ensemble des points de l'axe numérique compris entre -1 et $+1$, les points -1 et $+1$ étant inclus (fig. 2).

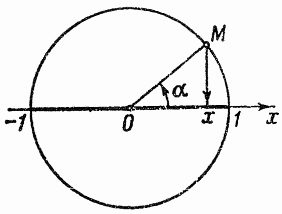

Fig. 2

D é f i n i t i o n. On appelle *domaine de définition* d'une variable l'ensemble des valeurs numériques qu'elle est susceptible de prendre.

Citons les domaines de définition de certaines variables que nous rencontrerons fréquemment par la suite.

On appelle *intervalle ouvert* ou *intervalle* d'extrémités a et b l'ensemble de tous les nombres x compris entre a et b ($a < b$); les nombres a et b n'appartiennent pas à cet ensemble. On le désigne soit par la notation (a, b), soit par les inégalités $a < x < b$.

On appelle *segment* ou *intervalle fermé* d'extrémités a et b l'ensemble de tous les nombres x compris entre les deux nombres a et b; les nombres a et b appartiennent à l'ensemble. On le désigne soit par la notation $[a, b]$, soit par les inégalités

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Si l'un des nombres a ou b, a par exemple, appartient et si l'autre n'appartient pas à cet intervalle, on a alors un *semi-intervalle* ouvert en b; on peut le définir par les inégalités

$$a \leqslant x < b$$

et on le désigne par la notation $[a, b)$. Si le nombre b appartient et si a n'appartient pas à cet intervalle, on a alors un *semi-intervalle* ouvert en a $(a, b]$, que l'on peut définir à l'aide des inégalités

$$a < x \leqslant b.$$

Si la variable x prend toutes les valeurs plus grandes que a, on désigne cet intervalle par la notation $(a, +\infty)$, que l'on peut également définir à l'aide des inégalités conventionnelles

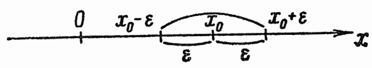

Fig. 3

$$a < x < +\infty.$$

On considérera également les intervalles et les semi-intervalles infinis, définis par les inégalités conventionnelles suivantes:

$$a \leqslant x < +\infty; \quad -\infty < x < c; \quad -\infty < x \leqslant c;$$
$$-\infty < x < +\infty.$$

Exemple. Le domaine de définition de la variable $x = \cos \alpha$, pour toutes les valeurs de α, est le segment $[-1, +1]$; on peut l'exprimer à l'aide des inégalités $-1 \leqslant x \leqslant +1$.

On peut remplacer dans les définitions précédentes le mot « nombre » par le mot « point ». Ainsi, on appelle *segment* l'ensemble de tous les points x situés entre les points a et b (a et b étant les *extrémités du segment*), les points a et b sont inclus dans cet ensemble.

On appelle *voisinage* d'un point x_0 tout intervalle ouvert (a, b) contenant ce point, c'est-à-dire un intervalle (a, b) pour lequel soient vérifiées les inégalités $a < x_0 < b$. On choisit souvent le voisinage (a, b) de sorte que le point x_0 se trouve en son milieu. Le point x_0 est alors appelé le *centre du voisinage* et le nombre $\frac{b-a}{2}$ le *rayon du voisinage*. La figure 3 représente le voisinage $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ de centre x_0 et de rayon ε.

§ 5. Variable ordonnée. Variable croissante et variable décroissante. Variable bornée

On dit que la variable x est *ordonnée* si l'on connaît son domaine de définition et si, pour chaque couple de ses valeurs, on peut indiquer celle qui est antécédente et celle qui est conséquente. Ici la notion d'« antécédence » ou de « conséquence » n'est pas liée au temps. Elle exprime une certaine façon d'ordonner les valeurs de la variable.

Un cas particulier de grandeur variable ordonnée est celui d'une grandeur variable dont les valeurs forment une *suite numérique* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ Dans ce cas, pour $k' < k$ la valeur $x_{k'}$ est « antécédente » et la valeur x_k « conséquente », indépendamment du fait laquelle de ces deux valeurs est la plus grande.

D é f i n i t i o n 1. Une variable est dite *croissante* si chaque valeur conséquente est plus grande que chaque valeur antécédente. Une variable est dite *décroissante* si chaque valeur conséquente est plus petite que chaque valeur antécédente.

Les variables croissantes et les variables décroissantes sont appelées *variables à variation monotone* ou simplement *variables monotones.*

E x e m p l e. Quand on double le nombre des côtés d'un polygone régulier inscrit dans un cercle, l'aire s de ce polygone est une variable croissante. De même, quand on double le nombre des côtés d'un polygone circonscrit à un cercle, l'aire de ce polygone est une variable décroissante. Remarquons qu'une variable n'est pas nécessairement croissante ou décroissante. Par exemple, la variable $x = \sin \alpha$ n'est pas une variable monotone quand α croît sur le segment $[0, 2\pi]$. Elle croît d'abord de 0 à 1, puis décroît de 1 à -1, croît de nouveau de -1 à 0.

D é f i n i t i o n 2. Une variable x est dite *bornée* s'il existe une constante $M > 0$ telle que, pour toutes les valeurs conséquentes de la variable à partir d une certaine valeur, les inégalités

$$-M \leqslant x \leqslant M, \quad \text{c'est-à-dire } |x| \leqslant M,$$

sont satisfaites.

En d'autres termes, une variable est dite bornée s'il existe un segment $[-M, M]$ tel qu'à partir d'une certaine valeur toutes les valeurs conséquentes de la variable appartiennent à ce segment. Toutefois, il existe des variables bornées dont les valeurs ne remplissent pas le segment $[-M, M]$. Par exemple, une variable susceptible de prendre les différentes valeurs rationnelles du segment $[-2, 2]$ est bornée, mais il est évident qu'elle ne prend pas toutes les valeurs de ce segment (précisément, les valeurs irrationnelles).

§ 6. Fonction

L'étude des divers phénomènes de la nature et la résolution de divers problèmes techniques et, par conséquent, mathématiques, nous amènent à considérer la variation d'une grandeur en corrélation avec la variation d'une autre grandeur. Ainsi quand nous étudions un mouvement, nous considérons le chemin parcouru comme une variable qui dépend du temps. Ici le chemin parcouru est une fonction du temps.

Prenons un autre exemple. La surface du cercle en fonction du rayon est donnée par la formule bien connue $Q = \pi R^2$. Si le rayon R prend différentes valeurs, la surface Q prendra également différentes valeurs. Ainsi la variation de l'une de ces variables entraîne la variation de l'autre. Ici la surface du cercle Q est une fonction du rayon R. Donnons la définition de la notion de « fonction ».

Définition 1. Nous dirons que y est une *fonction* de x et nous écrirons $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, etc., si à chaque valeur de la variable x appartenant à un certain domaine correspond une valeur de la variable y.

La variable x est appelée *variable indépendante*. La dépendance entre les variables x et y s'appelle une *dépendance fonctionnelle*. La lettre f, qui entre dans la notation symbolique de la dépendance fonctionnelle $y = f(x)$, indique qu'il faut appliquer certaines opérations à x pour obtenir la valeur correspondante de y. On écrit parfois $y = y(x)$, $u = u(x)$, au lieu de $y = f(x)$, $u = \varphi(x)$; dans ce cas, les lettres y et u expriment en même temps la valeur de la fonction et le symbole des opérations appliquées à x.

La notation $y = C$, où C est une constante, exprime une fonction dont la valeur est égale à C quel que soit x.

Définition 2. L'ensemble des valeurs x pour lesquelles la valeur de la fonction y est donnée par la loi $f(x)$ est appelé *domaine d'existence* de la fonction (ou *domaine de définition* de la fonction).

Exemple 1. La fonction $y = \sin x$ est définie pour toutes les valeurs de x. Donc, son domaine d'existence est l'intervalle infini $-\infty < x < +\infty$

Remarque 1. S'il existe une dépendance fonctionnelle entre les deux variables x et $y = f(x)$ et si l'on considère x et $y = f(x)$ comme des variables ordonnées, nous dirons alors que pour les deux valeurs $y^* = f(x^*)$ et $y^{**} = f(x^{**})$ de la fonction $f(x)$ correspondant aux valeurs x^* et x^{**} de la variable x, la valeur conséquente de la fonction est celle qui correspond à la valeur conséquente de la variable indépendante. C'est pourquoi nous sommes tout naturellement conduits à énoncer la définition suivante.