Chapitre 1- Les suites numériques.

I. Exercices

1. Énoncés

Raisonnement par récurrence

Exercice 1

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^3 = 1 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots\dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Exercice 2

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le nombre $2^{2n} - 1$ est divisible par 3.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n - 1$.

Exercice 4

Démontrer par récurrence pour tout entier naturel $n \geq 1$, $2^n + 1 \geq n^2$.

Exercice 5

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par: $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

Démontrer par récurrence pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq 2$.

Sens de variation d'une suite

Exercice 6

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par: $u_0 = \dfrac{1}{3}$ et $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$

1) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq 1$.
2) En déduire le sens de variation de la suite u.

Exercice 7

1) La suite (u_n) est définie sur N par $u_n = n - 2^n$.
Déterminer le sens de variation de la suite u.

2) Étudier de même la monotonie de la suite (u_n) définie sur N* par $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 8

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ telle que $\sum_{k=0}^{n} u_k = \dfrac{(n+1)(-5n+6)}{2}$. Déterminer la raison de la suite (u_n) .

Exercice 9

Soit (u_n) la suite définie sur N par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{7}u_n + 6 \end{cases}$.

Soit (v_n) la suite définie sur N par : $v_n = u_n - 7$.

1) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

2) En déduire l'expression de u_n en fonction de n

3) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Limites d'une suite

Exercice 10

Étudier les limites des suites données ci-dessous

a) $u_n = n^2 - 2n + 3$

b) $u_n = n^2 \text{-} 3\sqrt{n+1}$

c) $u_n = \dfrac{n-1}{n+2}$

d) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+3}$

e) $u_n = \dfrac{n^2 - 5n + 1}{2n - 1}$

f) $u_n = \dfrac{3n+6}{n^2 + 3n + 5}$

g) $u_n = \dfrac{n^3 - 2}{n^3 + 5}$

h) $u_n = \dfrac{2}{3^n}$

i) $u_n = -\dfrac{3^n}{2^{n+1}}$

j) $u_n = \left(-\dfrac{4}{3}\right)^n$

Exercice 11

On considère la suite (u_n) définie sur N par: $u_n = \dfrac{3 - \cos^2(2n)}{2n+1}$.

1) Montrer que, pour tout entier n, on a : $\dfrac{2}{2n+1} \le u_n \le \dfrac{3}{2n+1}$.

2) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie sur N par: $u_n = n + \sqrt{n^2 + 3n}$.

1) Vérifier que, pour tout entier n, $u_n \geq 2n$.
2) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = 6 - \dfrac{5}{x+1}$.

1.a) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
b) Résoudre dans l'intervalle $[0 ; +\infty[[$ l'équation $f(x) = x$.
On note α la solution.
c) Montrer que si x appartient à l'intervalle $[0 ; \alpha]$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $[0 ; \alpha]$.
2) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout n : $u_{n+1} = f(u_n)$.
a) Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n,

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha.$$

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 14***

Soit deux suites u et v telles que : $\begin{cases} \forall n \in N, 0 \leq u_n \leq 1 \\ \forall n \in N, 0 \leq v_n \leq 1 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n v_n = 1 \end{cases}$

Démontrer que les suites u et v sont convergentes et que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 1$

Exercice 15***: sommes télescopiques

Partie A : étude d'un exemple.
On considère la suite définie sur N* par : $u_n = n \times n!$
1) Vérifier que, pour tout entier n non nul, $u_n = (n+1)! - n!$
2) On note S_n la somme $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k$. Montrer que, pour tout entier n non nul, $S_n = (n+1)! - 1$.

Partie B : somme télescopique.
Soit $(a_n)_{n \in N}$ une suite de nombres. On appelle somme télescopique associée à la suite (a_n) la somme $\sum_{i=0}^{i=n} (a_{i+1} - a_i)$.

1.a) Calculer, pour tout entier n, la somme $\sum_{i=0}^{i=n} (a_{i+1} - a_i)$
b) Soit p un entier naturel fixé, calculer, pour tout entier n, tel que: $n \geq p$, $\sum_{i=p}^{i=n} (a_{i+1} - a_i)$.

Exercice 16***: suites adjacentes

Partie A : *Définition de deux suites adjacentes.*
Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si elles vérifient les 3 conditions suivantes : (1) la suite (u_n) est croissante

(2) la suite (v_n) *est décroissante*

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

1) Démontrer que si les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors pour tout entier n, on a : $u_n \leq v_n$.

2) En déduire que deux suites adjacentes sont convergentes et qu'elles convergent vers la même limite.

Partie B :

On définit deux suites a et b par $a_0 = 2$, $b_0 = 4$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{4}(3a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \dfrac{1}{4}(a_n + 3b_n) \end{cases}$$

1) On appelle c la suite définie pour tout entier naturel n par : $c_n = b_n - a_n$.
   a) Montrer que c est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   b) Déterminer la limite de la suite c.

2.a) Montrer que la suite a est croissante.
   b) Montrer que la suite b est décroissante.

3) Montrer que les suites a et b convergent et qu'elles ont alors même limite que l'on appellera l .

4) On appelle t la suite définie pour tout entier naturel n par : $t_n = a_n + b_n$.
   a) Montrer que t est une suite constante. Déterminer cette constante.
   b) Déterminer alors la valeur de l.

5) Déterminer, pour tout entier naturel n, a_n et b_n en fonction de n.

2. Corrigés des exercices 1 à 16

Exercice 1

Initialisation: pour n=1, $\sum\limits_{k=1}^{k=1} k^3 = 1^3 = 1 = \left(\dfrac{1\times 2}{2}\right)^2 \Rightarrow \mathcal{P}(1)$ vraie.

Hérédité: supposons qu'il existe un rang n tel que $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Pour tout entier n,

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{k=n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2 \times \left[\left(\frac{n}{2}\right)^2 + (n+1)\right]$$

$$= (n+1)^2 \times \left[\frac{n^2+4\text{n}+4}{2}\right] = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.$$

On a ainsi montré que: pour tout entier naturel non nul n, $\mathcal{P}(n)$ vraie $\Rightarrow$ ($\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

Conclusion: pour tout entier non nul n, $\sum\limits_{k=1}^{k=n} k^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 2

Initialisation: pour $n = 0$, $2^{2n} - 1 = 0$ donc il est divisible par 3. $\Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie.

Hérédité: supposons qu'il existe un rang n tel que $2^{2n} - 1$ soit divisible par 3.

Il existe donc un entier relatif k tel que $2^{2n} - 1 = 3k$.

Pour tout entier n :
$2^{2(n+1)} - 1 = 2^{2n} \times 4 - 1 = 2^{2n} \times (3 + 1) - 1 = 2^{2n} \times 3 + 2^{2n} - 1 = 2^{2n} \times 3 + 3k = 3(2^{2n} + k)$.
Donc $2^{2(n+1)} - 1$ est divisible par 3.
On a ainsi montré que: pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$ vraie $\Rightarrow$ ($\mathcal{P}(n+1)$ vraie.
Conclusion : pour tout entier naturel n, le nombre $2^{2n} - 1$ est divisible par 3.

Exercice 3

Initialisation: pour $n = 0$, $2^n - 1 = 0 = u_0$ $\Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie.
Hérédité: supposons qu'il existe un rang n tel que $u_n = 2^n - 1$.
Pour tout entier n :
$u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2\left(2^n - 1\right) + 1 = 2^{n+1} - 1$.
On a ainsi montré que: pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$ vraie $\Rightarrow$ ($\mathcal{P}(n+1)$ vraie.
Conclusion : pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n - 1$.

Exercice 4

Initialisation : $n = 3$ $\left.\begin{array}{l} 2^3 + 1 = 10 \\ 3^2 = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow 2^3 + 1 \geq 3^2$ donc $\mathcal{P}(3)$ est vraie.
Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \geq 3$ tel que $2^n + 1 \geq n^2$.
Pour tout entier $n \geq 3$:
$2^{n+1} + 1 = 2\left(2^n + 1\right) - 1 \geq 2n^2 - 1$ (par hypothèse de récurrence)
Comparons $2n^2 - 1$ et $\left(n+1\right)^2$:
$2n^2 - 1 - \left(n+1\right)^2 = 2n^2 - 1 - n^2 - 2n - 1 = n^2 - 2n - 2$
Étudions le signe du trinôme : $x^2 - 2x - 2$
$\Delta = 12$ $x_1 = 1 - \sqrt{3}$ $x_2 = 1 + \sqrt{3}$. Donc pour tout $x > 1 + \sqrt{3}$: $x^2 - 2x - 2 > 0$
Ce qui implique : pour $n \geq 3$, $n^2 - 2n - 2 \geq 0$.
On en déduit : $2^{n+1} + 1 \geq \left(n+1\right)^2$.
On a ainsi montré que: pour tout entier naturel $n \geq 3$, $\mathcal{P}(n)$ vraie $\Rightarrow$ ($\mathcal{P}(n+1)$ vraie.
Conclusion : la propriété « $2^n + 1 \geq n^2$ » est vraie pour tout entier naturel $n \geq 3$.
Remarque: on peut vérifier que cette propriété est aussi vérifiée pour $n = 1$ et $n = 2$.

Exercice 5

Initialisation : $u_0 = 1 \in \left[1;2\right]$
Hérédité : supposons qu'il existe un rang $n \geq 0$ tel que $1 \leq u_n \leq 2$.
Pour tout entier n :
$1 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow 2 \leq u_n + 1 \leq 3 \Rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{u_n + 1} \leq \sqrt{3}$ (la fonction racine carrée étant croissante sur R_+).
De plus : $\sqrt{2} > 1$ et $\sqrt{3} < 2$ d'où : $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.
On a ainsi montré que: pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$ vraie $\Rightarrow$ ($\mathcal{P}(n+1)$ vraie.
Conclusion : pour tout entier n : $1 \leq u_n \leq 2$.

Exercice 6

1) *Initialisation*: pour $n = 0$, $0 \leq \frac{1}{3} \leq 1 \Rightarrow \mathcal{P}(0)$ vraie.

Hérédité: supposons qu'il existe un rang $n \geq 0$ tel que $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Pour tout entier n :

$0 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow -1 \leq u_n - 1 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq (u_n - 1)^2 \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq -(u_n - 1)^2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 1 - (u_n - 1)^2 \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq u_n(2 - u_n) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1$

On a ainsi montré que: pour tout entier n : $\mathcal{P}(n)$ vraie) $\Rightarrow$ ($\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

Conclusion : pour tout entier n, $0 \leq u_n \leq 1$.

2) Pour tout entier n : $u_{n+1} - u_n = u_n(2 - u_n) - u_n = u_n(1 - u_n)$

$0 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow 1 - u_n \geq 0$. D'où : $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

La suite est croissante sur N.

Exercice 7

1) Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = \left((n+1) - 2^{(n+1)}\right) - \left(n - 2^n\right) = 1 + 2^n(1-2) = 1 - 2^n$$

$u_{n+1} - u_n \leq 0$ car $2^n \geq 1 \Leftrightarrow 1 - 2^n \leq 0$

La suite (u_n) est décroissante.

2) Pour tout entier naturel n non nul: $u_n = \dfrac{2^n}{n!} > 0$

Étudions donc le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}} = \dfrac{2}{n+1}$,

$$n \geq 1 \Rightarrow n+1 \geq 2 \Rightarrow \frac{2}{n+1} \leq 1 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$$

La suite (u_n) est décroissante.

Exercice 8

(u_n) étant une suite arithmétique de raison r, de premier terme $u_0 = 3$, la somme de ses $n+1$ premiers termes est : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$ avec $u_n = u_0 + nr$.

On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(n+1)(3+3+nr)}{2} = \frac{(n+1)(-5n+6)}{2}$ donc $6 + nr = 6 - 5n$

d'où $r = -5$.

Exercice 9

1) Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = u_{n+1} - 7 = \frac{1}{7}u_n + 6 - 7 = \frac{1}{7}(u_n - 7) = \frac{1}{7}v_n$

donc (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{7}$, de premier terme -6.

2) On en déduit :

Pour tout entier naturel n, $v_n = v_0\left(\frac{1}{7}\right)^n = -6\left(\frac{1}{7}\right)^n$,

$v_n = u_n - 7 \Leftrightarrow u_n = v_n + 7 = -6\left(\frac{1}{7}\right)^n + 7$,

$0 < \frac{1}{7} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +7$.

Exercice 10

Lorsque la suite est donnée sous forme fonctionnelle, on applique les méthodes et les théorèmes utilisés pour les fonctions :

a) $u_n = n^2 - 2n + 3$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

b) $u_n = n^2 - 3\sqrt{n+1}$ $\quad u_n = n^2 - 3\sqrt{n+1} = n^2\left(1 - 3\sqrt{\frac{n+1}{n^4}}\right) =$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n^4} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^4} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n^4}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(1 - 3\sqrt{\frac{n+1}{n^4}}\right) = 1$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

c) $u_n = \frac{n-1}{n-2}$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n} = 1$.

d) $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n+3}$ $\quad u_n = \frac{\sqrt{n}}{n+3} = \frac{1}{\sqrt{n} + \frac{3}{\sqrt{n}}}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{n}} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n} + \frac{3}{\sqrt{n}}\right) = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0 .$$

e) $u_n = \frac{n^2 - 5n + 1}{2n - 1}$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2} = +\infty$.

f) $u_n = \frac{3n+6}{n^2 + 3n + 5}$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n} = 0$.

g) $u_n = \frac{n^3 - 2}{n^3 + 5}$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^3}{n^3} = 1$.

h) $u_n = \frac{2}{3^n} = 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\qquad 0 < \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ $\qquad$ D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

i) $u_n = -\frac{3^n}{2^{n+1}} = -\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}\right)^n$ $\qquad \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$ $\qquad$ D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

j) $u_n = \left(-\frac{4}{3}\right)^n$ $\qquad -\frac{4}{3} < -1$ donc la suite n'a pas de limite.

Exercice 11

1) Pour tout entier n : $-1 \le \cos(2n) \le 1 \Rightarrow 0 \le \cos^2(2n) \le 1 \Rightarrow -1 \le -\cos^2(2n) \le 0$

$$2 \leq 3-\cos^2(2n) \leq 3 \Rightarrow \frac{2}{2n+1} \leq \frac{3-\cos^2(2n)}{3n+1} \leq \frac{3}{2n+1}$$

D'où : $\frac{2}{2n+1} \leq u_n \leq \frac{3}{2n+1}$.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{2n+1}\right)=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2n+1}\right)=0$

Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 12

1) Pour tout entier n, $n^2+3n \geq n^2 \Rightarrow \sqrt{n^2+3n} \geq \sqrt{n^2} \Rightarrow \sqrt{n^2+3n} \geq n \Rightarrow u_n \geq 2n$.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty$, donc d'après le théorème de comparaison : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 13

1.a) f est une fonction dérivable sur]0 ; +∞[en tant que fonction rationnelle définie sur]0 ; +∞[et $f'(x)=\frac{5}{(x+1)^2}>0$.

f est donc croissante sur]0 ; +∞[.

b) $f(x)=x \Leftrightarrow 6-\frac{5}{x+1}=x \Leftrightarrow 6(x+1)-5=x(x+1) \Leftrightarrow x^2-5x-1=0$

$\Delta = 29$ d'où : $x_1=\frac{5-\sqrt{29}}{2}<0$ (ne convient pas) et $x_2=\frac{5+\sqrt{29}}{2}>0$

D'où : $\alpha = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$.

c) Pour tout x appartient à l'intervalle $[0 ; \alpha]$:

$0<x<\alpha \Rightarrow f(0)<f(x)<f(\alpha)$ car f est croissante.

$\Rightarrow 1<f(x)<\alpha \Rightarrow f(\alpha)\in[0;\alpha]$.

2.a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

Initialisation : $u_0 = 0$ $u_1 = f(u_0) = f(0) = 1$.

D'où : $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$.

Hérédité: supposons qu'il existe un rang n tel que : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

D'après les variations de la fonction f,

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha \Rightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\alpha) \Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$

Conclusion : pour tout entier naturel n: $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

b) Puisque, pour tout entier n, $u_n \leq u_{n+1}$, la suite est croissante.

De plus pour tout entier n, $u_n \leq \alpha$, la suite est majorée.

La suite (u_n) est donc croissante et majorée par α, elle est donc convergente vers ℓ.

3) f est continue sur]0 ; +∞[donc ℓ est solution de l'équation $f(x)=x$.

D'où : $\ell = \alpha$.

Exercice 14***

$$\left.\begin{array}{l} \forall n \in N, 0 \leq u_n \leq 1 \\ \forall n \in N, v_n \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in N, 0 \leq u_n v_n \leq v_n \leq 1$$