Chapitre 1.
Second degré

1. Comment mettre sous forme canonique le trinôme ax^2+bx+c ?

Coach : La mise sous forme canonique consiste à écrire ax^2+bx+c sous la forme $a(x-\alpha)^2+\beta$. C'est en fait une forme assez pratique pour tracer une courbe ou résoudre une équation.

Méthode

Pour mettre ax^2+bx+c sous forme canonique :
Etape 1 : on factorise ax^2+bx+c par a (si $a\neq 1$).
Etape 2 : on essaie de faire apparaître l'une des deux identités remarquables $(m+p)^2=m^2+2mp+p^2$ ou $(m-p)^2=m^2-2mp+p^2$.

Exemple (force 1)

Coach : Pour commencer, un petit exemple simple où $a=1$ et où tu peux passer directement à l'étape 2.

Ex. 1. *Mettre sous forme canonique le trinôme* x^2+6x+7.

Coach : Observe bien : x^2+6x+7 ressemble à x^2+6x+9 (soit $(x+3)^2$).

On a : $x^2+6x+7=x^2+6x+\underbrace{9-9}_{0}+7=\underbrace{x^2+6x+9}_{(x+3)^2}\underbrace{-9+7}_{-2}=(x+3)^2-2$.

Coach : Pour repérer facilement la bonne identité remarquable voici un petit tuyau. Dans l'expression de départ x^2+6x+7, tu prends le 6 (le coefficient de x), tu le divises par 2, ce qui donne 3 tu le mets au carré ce qui donne 9 (il s'agira donc de l'identité remarquable $(x+3)^2=x^2+6x+9$). Ensuite, tu « fais » $+9-9$ et le tour est joué.

Exemple (force 2)

Ex. 2. *Mettre sous forme canonique le trinôme* $2x^2+16x+2$ *.*

Etape 1 : $2x^2+16x+2=2\left(x^2+8x+1\right)$.

Etape 2 :

> **Coach** : x^2+8x+1 ressemble à $x^2+8x+16$ (c'est-à-dire à $\left(x+4\right)^2$). Il faut donc « faire » un $+16-16$!

$$2x^2+16x+2=2\left(x^2+8x+1\right)=2\left(x^2+8x+16-16+1\right)=2\left[\left(x+4\right)^2-15\right]=2\left(x+4\right)^2-30$$

EXERCICES-TESTS

> **Coach** : Avant de te lancer, révise bien des identités remarquables à savoir :
> $\left(m+p\right)^2=m^2+2mp+p^2$ et $\left(m-p\right)^2=m^2-2mp+p^2$.

Exercice-Test (force 1)

ET1. *Mettre sous forme canonique : a)* x^2+2x+8 *b)* x^2-4x+7 *c)* x^2+6x+1 *d)* x^2-2x-7 *e)* x^2+4x-5 *f)* $x^2+10x-1$.

Exercice-Test (force 2)

ET2. *Mettre sous forme canonique : a)* $-2x^2+4x-6$ *b)* $2x^2-12x+4$ *c)* $-3x^2+24x-4{,}5$.

2. Comment tracer la courbe $y=ax^2+bx+c$?

> **Coach** : Une parabole est une courbe magnifique qui était déjà connue des Grecs : Archimède les utilisait comme arme de guerre (les miroirs ardents). Je vais te montrer comment les tracer, regarde !

Méthode

Pour tracer la parabole $y=ax^2+bx+c$,

1) On calcule $\frac{-b}{2a}$ (abscisse du sommet).

2) On utilise le tableau de valeurs suivant (centré en $\frac{-b}{2a}$). Autour du centre, on « fait » $+0{,}5$, $+0{,}5$ puis $+1$, et $+1$ (pareil à gauche avec $-0{,}5$, $-0{,}5$ puis -1, et -1).

$\overleftarrow{-1}$ $\overleftarrow{-1}$ $\overleftarrow{-0,5}$ $\overleftarrow{-0,5}$ $\overrightarrow{+0,5}$ $\overrightarrow{+0,5}$ $\overrightarrow{+1}$ $\overrightarrow{+1}$

x					$\mathbf{\frac{-b}{2a}}$				
$y = ax^2 + bx + c$									

3) On complète les valeurs du tableau de la 2^e ligne avec la fonction table de la calculatrice.
4) On reporte sur un graphique les points du tableau de valeurs obtenu.

Exemple (force 1)

Ex. 1. *Tracer la courbe* $y = x^2 + 6x + 5$.

On a : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 6 \\ c = 5 \end{cases}$ d'où : $\frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2 \times 1} = \frac{-6}{2} = -\mathbf{3}$, c'est l'abscisse du sommet.

On construit notre tableau de valeurs centré en $-\mathbf{3}$:

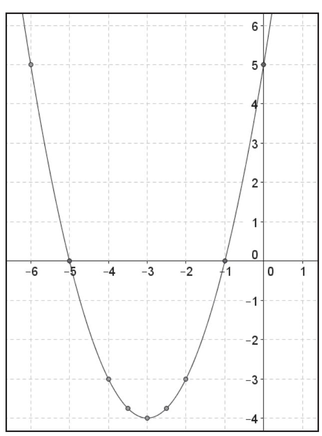
$\overleftarrow{-1}$ $\overleftarrow{-1}$ $\overleftarrow{-0,5}$ $\overleftarrow{-0,5}$ $\overrightarrow{+0,5}$ $\overrightarrow{+0,5}$ $\overrightarrow{+1}$ $\overrightarrow{+1}$

x	-6	-5	-4	$-3,5$	$-\mathbf{3}$	$-2,5$	-2	-1	0
$y = x^2 + 6x + 5$									

Maintenant on le complète avec la calculatrice et l'instruction « table » qu'on paramètre ainsi : Début table : -6 , pas table : 0,5 (et fin table : 0 (si c'est demandé)).

x	-6	-5	-4	$-3,5$	$-\mathbf{3}$	$-2,5$	-2	-1	0
$y = x^2 + 6x + 5$	5	0	-3	$-2,75$	-2	$-2,75$	-3	0	5

On reporte les points (de coordonnées $\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$, etc.), ce qui donne :



EXERCICE-TEST

Exercice-Test (force 1)

ET1. *Tracer la courbe* $y = x^2 - 3x + 5$.

3. Comment étudier les variations de la fonction trinôme $x \to ax^2 + bx + c$?

Coach : Je vais t'apprendre à obtenir le tableau de variations d'une fonction trinôme du second degré. C'est facile, il n'y a que deux cas à retenir !

Méthode

1) On calcule $\frac{-b}{2a}$ (abscisse du sommet) pour centrer le tableau de variations.

2) Il y a ensuite deux cas :

Si $a > 0$, on a :

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$x \to ax^2 + bx + c$	$\searrow$		$\nearrow$

Si $a < 0$, on a :

x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$x \to ax^2 + bx + c$	$\nearrow$		$\searrow$

3) Enfin, on calcule le minimum (ou le maximum suivant les cas) en remplaçant x par $\frac{-b}{2a}$ dans l'expression $ax^2 + bx + c$.

Exemple (force 1)

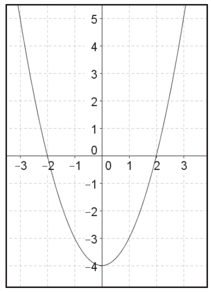
Ex. 1. *Soit g définie sur* $]-\infty;+\infty[$ *par* $g(x) = x^2 - 4$. *Etudier les variations de g.*

On a : $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -4 \end{cases}$ d'où : $\frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2 \times 1} = \frac{0}{2} = 0$. On centre donc le tableau de variations en **0**.

Comme $a > 0$, on obtient :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x \to x^2-4$		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

Car $g(0)=0^2-4=-4$, ce qui est confirmé graphiquement :

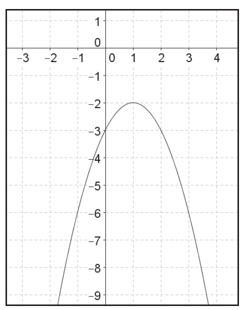


Ex. 2. *Soit h définie sur* $]-\infty;+\infty[$ *par* $h(x)=-x^2+2x-3$ *. Etudier les variations de h.*

On a : $\begin{cases} a=-1 \\ b=2 \\ c=-3 \end{cases}$ d'où : $\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-2}{2\times(-1)}=\dfrac{-2}{-2}=1$ (abscisse du sommet). On centre donc le tableau de variations en **1**. Comme $a>0$, on obtient :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x \to -x^2+2x-3$		$\nearrow$	-2	$\searrow$	

Car $h(1)=-1^2+2\times1-3=-1+2-3=-2$, ce qui est confirmé graphiquement :



EXERCICES-TESTS

Exercice-Test (force 1)

ET1. *Dans chaque cas, étudier les variations de la fonction f définie sur* $]-\infty;+\infty[$ *par :*

a) $f(x)=x^2+2x-1$ *b)* $f(x)=-x^2+4x$.

c) $f(x)=x^2-6x+0{,}5$ *d)* $f(x)=-x^2-5x+2$.

4. Comment résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$ en utilisant la mise sous forme canonique ?

Méthode

Pour résoudre l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$,

1) On met sous forme canonique le trinôme $ax^2+bx+c=0$ (voir paragraphe 1).

2) On utilise la propriété (de 2[de]) suivante : $X^2=a$ équivaut à $\begin{cases} X=\sqrt{a} \\ \text{ou} \\ X=-\sqrt{a} \end{cases}$.

Exemple (force 1)

Ex. 1. *On souhaite résoudre l'équation* $x^2+10x-39=0$.

1) Ecrire le trinôme $x^2+10x-39$ *sous forme canonique.*

2) En déduire les solutions de l'équation $x^2+10x-39=0$.

1) On a : $x^2+10x-39=x^2+10x+\underbrace{25-25}_{0}-39=\underbrace{x^2+10x+25}_{(x+5)^2}-25-39=(x+5)^2-64$.

2) $x^2+10x-39=0$ équivaut à $(x+5)^2-64=0$ soit : $(x+5)^2=64$

Coach : Utilise la propriété : « $X^2=a$ (avec $a>0$) équivaut à $\begin{cases} X=\sqrt{a} \\ \text{ou} \\ X=-\sqrt{a} \end{cases}$ » !

Or $(x+5)^2=64$ équivaut à $\begin{cases} x+5=\sqrt{64} \\ \text{ou} \\ x+5=-\sqrt{64} \end{cases}$ soit : $\begin{cases} x+5=8 \\ \text{ou} \\ x+5=-8 \end{cases}$ soit : $\begin{cases} x=8-5 \\ \text{ou} \\ x=-8-5 \end{cases}$ soit :

$\begin{cases} x=3 \\ \text{ou} \\ x=-13 \end{cases}$. Conclusion : $S=\{-13;3\}$.

EXERCICE-TEST

Exercice-Test (force 1)

ET1. *On souhaite résoudre l'équation* $x^2-10x+21=0$.

1) Ecrire le trinôme $x^2-10x+21$ *sous forme canonique.*

2) En déduire les solutions de l'équation $x^2-10x+21=0$.

5. Comment résoudre l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ en utilisant la méthode du discriminant?

Coach : $ax^2+bx+c=0$ est ce qu'on appelle une équation du second degré. Pourquoi ? Eh bien, tout simplement parce que l'inconnue x est présente à l'exposant 2. Ces équations furent étudiées il y a environ 4000 ans par les Égyptiens et les Mésopotamiens pour résoudre leurs problèmes de calculs de surfaces agricoles (les longueurs étant du premier degré, les surfaces sont du second degré, et les volumes du troisième). Pour parvenir à résoudre ce type d'équations, on utilise le plus souvent la méthode du discriminant, méthode ultra classique de la 1re S qu'on va voir ci-dessous.

Méthode

Pour résoudre l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$.
1) On identifie a, b et c.
2) On calcule le discriminant Δ par la formule $\Delta=b^2-4ac$.
3) On applique le résultat suivant :

Si $\Delta>0$, il y a deux solutions : $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta=0$, il y a une solution (double) : $x_0=\dfrac{-b}{2a}$.

Si $\Delta<0$, il n'y a pas de solution (réelle).

Exemples (force 1)

Ex. 1. *Résoudre* $2x^2-10x+12=0$.

On a : $\begin{cases} a=2 \\ b=-10 \\ c=12 \end{cases}$ d'où : $\Delta=b^2-4ac=(-10)^2-4\times2\times12=100-96=4$.

Comme $\Delta>0$, il y a deux solutions : $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-10)+\sqrt{4}}{2\times2}=\dfrac{10+2}{4}=\dfrac{12}{4}=3$ et

$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-10)-\sqrt{4}}{2\times2}=\dfrac{10-2}{4}=\dfrac{8}{4}=2$. On a : $S=\{2;3\}$.

Coach : Il est important de bien comprendre que le nombre a est le coefficient qui se trouve devant x^2, b celui devant x et c la constante (le nombre à part). Par exemple :

- dans l'équation $-x^2+6x-13=0$, tu as $\begin{cases} a=-1 \\ b=6 \\ c=-13 \end{cases}$;

- dans l'équation $3x^2-5x=0$, tu as $\begin{cases}a=3\\b=-5\\c=0\ \text{(car il n'y pas de constante)}\end{cases}$;
- dans l'équation $-6x^2+17=0$, tu as $\begin{cases}a=-6\\b=0\quad\text{(car il n'y pas de x).}\\c=17\end{cases}$

Ex. 2. *Résoudre* $-x^2+4x-3=0$.

On a : $\begin{cases}a=-1\\b=4\\c=-3\end{cases}$ d'où : $\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times(-1)\times(-3)=16-12=4$.

Comme $\Delta>0$, il y a deux solutions : $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-4+\sqrt{4}}{2\times1}=\dfrac{-4+2}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-4-\sqrt{4}}{2\times1}=\dfrac{-4-2}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3$. On a : $S=\{-1;-3\}$.

Ex. 3. *Résoudre* $x^2-9=0$.

On a : $\begin{cases}a=1\\b=0\\c=-9\end{cases}$ d'où : $\Delta=b^2-4ac=0^2-4\times1\times(-9)=0+36=36$.

Comme $\Delta>0$, il y a deux solutions : $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-0+\sqrt{36}}{2\times1}=\dfrac{6}{2}=3$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-0-\sqrt{36}}{2\times1}=\dfrac{-6}{2}=-3$. On a : $S=\{-3;3\}$.

Ex. 4. *Résoudre* $x^2-6x=0$.

On a : $\begin{cases}a=1\\b=-6\\c=0\end{cases}$ d'où : $\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times1\times0=36-0=36$.

Comme $\Delta>0$, il y a deux solutions : $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-6)+\sqrt{36}}{2\times1}=\dfrac{6+6}{2}=\dfrac{12}{2}=6$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-6)-\sqrt{36}}{2\times1}=\dfrac{6-6}{2}=\dfrac{0}{2}=0$. On a : $S=\{0;6\}$.

Coach : Voyons maintenant un exemple où on a $\Delta=0$.

Ex. 5. *Résoudre* $x^2-6x+9=0$.

On a : $\begin{cases}a=1\\b=-6\\c=9\end{cases}$ d'où : $\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times1\times9=36-36=0$.

Comme $\Delta=0$, il y a une solution double : $x_0=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-(-6)}{2\times1}=\dfrac{6}{2}=3$. On a : $S=\{3\}$.

Coach : Voyons enfin un exemple où on a $\Delta<0$ (et on aura traité tous les cas).

Ex. 6. *Résoudre* $x^2+x+1=0$.

On a : $\begin{cases}a=1\\b=1\\c=1\end{cases}$ d'où : $\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times1=1-4=-3$.