Chapitre 1

Premiers pas

1. LE LANGAGE, LES PROPOSITIONS

A. LES MOTS

Comme toute autre science, les mathématiques sont décrites et formulées en langage courant. Il est de ce fait absolument indispensable d'expliciter, pour chacun des mots employés, **le sens qui lui correspond** en mathématiques, afin d'éviter de nombreuses confusions. Ce sens peut être bien différent de celui de la langue d'usage, comme nous le verrons souvent. Nous mettrons soigneusement en évidence les divergences d'emploi entre mots de la langue "de tous les jours" et mots employés dans un sens mathématique ; ces divergences sont à la source de nombreuses confusions chez les débutants. Le poids de l'habitude étant important, il convient de se remettre à l'esprit, dès que l'occasion se présente, les différences évoquées.

EXEMPLE

"Toutes les pièces du jeu d'échec ont un déplacement spécifié à l'avance" et "Toutes les pièces du jeu de dame ont un déplacement spécifié à l'avance" sont des phrases correctes du français usuel. Quiconque connaît tant soit peu ces deux jeux peut en saisir le sens. Il y a pourtant une ambiguïté, qui saute aux yeux si l'on se place du point de vue de l'ignorant : le déplacement dépend-il ou non de la pièce envisagée ? **Rien** dans ces phrases apparemment claires ne permet de faire cette distinction, essentielle pourtant dans la pratique ! Les règles du **langage mathématique** sont au contraire organisées de sorte qu'elles permettent **immédiatement** d'énoncer clairement les différences entre les deux jeux. Il est certain que l'articulation des phrases d'un tel “idiome” est éloignée de celle du français courant, bien que ce soient les mêmes mots qui sont employés ; d'où la nécessité d'un temps d'accoutumance.

Un autre obstacle apparaît très tôt, et qui corse la difficulté : l'organisation d'un texte mathématique n'est pas celle d'un discours ordinaire ; les appréciations vagues, qualitatives, suggestives, en sont **exclues** ; **chaque mot** d'une preuve logique doit pouvoir être justifié par référence aux résultats du cours et à eux seuls — comme nous le détaillerons dans les chapitres à venir ; dans la pratique, toute phrase qui **ressemble** à une affirmation mathématique exacte est **presque sûrement fausse**, etc. La langue courante, parlée plus encore qu'écrite (c'est bien la première qui est dominante, en ces temps de “communication”) supporte facilement le flou et l'indétermination, comme nous l'avons vu dans l'exemple ci-dessus (en chercher d'autres...). **Bien au contraire**, dans la langue mathématique, tout usage un tant soit peu abusif, toute phrase floue ou approximative, conduisent immédiatement à des erreurs énormes, bien au-delà de la faute de logique. Tout ceci nous éloigne considérablement des “discours d'opinion” diffusés par les journaux, écrits ou radio-télévisés, et demande donc au lecteur de se plier à un discipline nouvelle.

➡ **Répétons : nous débusquerons de nombreuses confusions courantes au fil des exercices ; et ce que le lecteur doit retenir est qu'en général, tout ce qui ressemble à la vérité, mais qui n'est pas vérifié dans ses moindres détails, est faux.**

Cela peut sembler rude, mais il s'agit bien d'une contrainte extérieure à la science et dictée par la réalité (voir le chapitre 2, paragraphe 6). S'y soumettre dès le départ facilite et accélère l'apprentissage.

Jusque-là le lecteur, le plus souvent, n'aura été habitué qu'à des problèmes de routine, applications immédiates de règles de calcul et dont le raisonnement est en général absent, sinon enfantin ; il en va tout autrement dans une grande partie des études post-BAC, où les démonstrations constituent le ressort principal des exercices. L'existence de logiciels comme Maple, Mathematica, etc. qui effectuent beaucoup plus vite et beaucoup mieux que les humains les calculs de routine (ceux des problèmes de BAC par exemple) n'est pas étrangère à cet état de fait. Le lycéen, futur étudiant, s'il souhaite aborder les études scientifiques dans de bonnes conditions, doit donc se préparer à un changement radical de point de vue ; et en premier lieu comprendre que l'essentiel de l'activité mathématique porte sur la manipulation de **propositions.**

B. LES NOTATIONS

Pas de mathématiques sans objets mathématiques sur lesquels va porter le raisonnement :

- objets donnés *a priori*, intuitivement : points, nombres entiers, nombres réels ;
- objets construits à partir des "briques élémentaires" : droites, cercles, vecteurs, fonctions etc.

Pour exprimer les opérations et les preuves, il est vite indispensable de nommer d'une façon ou d'une autre les intervenants du raisonnement : on introduit donc des notations à l'aide desquelles il devient possible de calculer et de raisonner.

Pour travailler efficacement, il faut choisir des notations cohérentes :

- éviter de nommer deux objets différents par une même lettre ;
- faire en sorte que des symboles semblables : majuscules romaines, minuscules grecques… désignent des êtres semblables : points, nombres réels…

Ces notations devant être adaptées aux opérations à effectuer.

Faute de bonnes notations pour les calculs algébriques, la mathématique grecque, pourtant fort avancée en géométrie, n'a pas su résoudre clairement des problèmes d'algèbre assez simples ; et l'introduction du symbolisme actuel et des dx, dy, dt du calcul infinitésimal a été décisive pour les progrès des mathématiques et de la physique. Ces quelques mots pour convaincre le futur étudiant de prêter un soin particulier au choix de ses notations lorsqu'il doit aborder un problème. Si, dans les problèmes de BAC, les variables sont données par l'énoncé, il n'en sera pas toujours ainsi dans l'enseignement supérieur et *il faudra prendre l'initiative d'introduire soi-même de nouveaux symboles pour aborder efficacement les exercices.*

C. LES PROPOSITIONS

L'essentiel du travail mathématique porte donc sur la **manipulation de propositions, et non** sur l'emploi calculatoire de recettes "précuites", ce que les ordinateurs font maintenant beaucoup plus vite et beaucoup mieux que nous. Pour le grand public — et les media — un mathématicien est avant tout un calculateur prodige : on ne saurait avoir une vue plus fausse de l'activité mathématique ! Nombre d'excellents mathématiciens sont de piètres calculateurs, ce qui n'a rien d'étonnant pour ceux qui possèdent une perception correcte de leur travail. Précisons maintenant notre sujet.

On entend par **proposition** toute affirmation — portant en général sur des objets mathématiques : points, nombres (et d'autres plus abstraits dont nous rencontrerons plus loin quelques représentants) — à laquelle on peut attribuer clairement la valeur **vraie** ou bien la valeur **fausse**.

EXEMPLES

1 "7 est un nombre premier" est une proposition vraie. Notons que cette affirmation fait implicitement référence à une **définition** : celle de **nombre premier**. Un nombre entier naturel p est dit **premier** s'il est plus grand (strictement) que 1 et ne possède pas d'autres diviseurs entiers positifs que 1 et lui-même (les notions d'entier naturel et de diviseur sont supposée connues).

Le fait que nous puissions attribuer la valeur **vraie** à la proposition qui nous occupe : "7 est un nombre premier" vous est familier, mais si vous souhaitez réellement progresser dans la voie scientifique il n'est plus question de se reposer sur des **impressions** de bien connu ; mais sur la **certitude** que chaque affirmation de vos textes mathématiques repose sur des base fermes et établies à l'avance. Il s'agit donc ici de vérifier qu'aucun des nombres 2, ... , 6 ne divise 7, ce qui se fait directement.

2 "Si x et y sont deux nombres réels > 0, $x < y$ entraîne $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$" est une proposition vraie fondée sur les propriétés classiques des nombres réels.

3 "2 est un nombre plus intéressant que 7" est une opinion, mais n'est pas une proposition au sens mathématique du terme ("être intéressant" n'est pas défini).

Souvent les propositions contiennent des variables : nombre x, entier naturel n... Nous noterons alors une telle proposition $\mathrm{P}(x)$, $\mathrm{P}(n)$... pour marquer la dépendance de sa valeur de vérité vis-à-vis de la variable.

EXEMPLES

4 n étant un entier naturel, "n est divisible par 2" peut être vraie ou fausse selon la valeur de la variable n.

5 x étant un nombre réel, "$x > 0$" est une proposition qui peut être vraie ou fausse selon la valeur de x.

Les propositions dépendant d'une ou plusieurs variables suivent les même règles logiques que celles qui ne font intervenir que des constantes.

➡ **Retenons dès maintenant** le principe du tiers exclu :
"Une proposition P prend la valeur vraie, ou bien la valeur fausse."

Ainsi, si P est une proposition, on peut toujours distinguer pour raisonner deux cas : P vraie, ou P fausse, et effectuer ainsi ce que l'on nomme une **disjonction de cas** ; et si supposer vrai une proposition P conduit à fabriquer une proposition Q qui est à la fois vraie et fausse, le cas de "P vraie" doit être **rejeté** et P est fausse : c'est la base du raisonnement par l'absurde (chapitre 5 – 2).

Notons que le fait de raisonner par l'absurde, *i.e.* de rajouter l'hypothèse "P fausse" aux données de départ rend souvent le travail plus facile aux débutants, notamment dans les situations abstraites : problèmes sur les groupes, algèbre linéaire.

Dès que l'on manipule plus d'une affirmation à la fois, le besoin se fait sentir de les **connecter entre elles**, créant ainsi de nouvelles propositions. Nous allons étudier quatre **connecteurs logiques** dans les paragraphes suivants : d'abord "et", "ou", puis l'implication $\Rightarrow$ et enfin l'équivalence. Muni de ces outils élémentaires, il sera possible de faire les premiers pas dans les méthodes de résolution des problèmes, et d'agencer correctement des propositions les unes à la suite des autres, ce qui permet de constituer des démonstrations.

2. LE "ET" ET LE "OU" EN MATHÉMATIQUES

A. LE "ET"

Lorsqu'un mathématicien souhaite exprimer qu'un objet mathématique possède simultanément deux propriétés P, Q, il l'exprime à l'aide de la conjonction "et". "P et Q" devient alors une nouvelle proposition mathématique, appelée **conjonction** des propositions P, Q.

Si P et Q sont deux propositions, "P et Q" est donc une nouvelle proposition, qui **par définition est vraie lorsque les propositions P et Q sont toutes deux vraies,** et **fausse dans tous les autres cas**.

EXEMPLE

Considérons la proposition P : "12 est divisible par 2", ainsi que la proposition Q : "12 est divisible par 3". "P et Q" est alors la proposition :

"12 est divisible par 2 et par 3".

Toutes ces propositions sont vraies.

Précisons ces "autres cas" évoqués dans la définition, *i.e.* ceux où la proposition "P et Q" est considérée comme **fausse**. Celui qui vient immédiatement à l'esprit est :

"P est fausse, Q aussi".

Mais il en est deux autres :

"P vraie, Q fausse" et "P fausse, Q vraie".

Cela fait donc **trois** cas que l'on pourra résumer par une seule proposition lorsque l'on connaîtra mieux la notion de **négation**. Prenez déjà garde à ne pas oublier l'un des cas !

B. LE "OU"

Donnons-nous à nouveau deux propositions P, Q, "P ou Q" est alors une nouvelle proposition, vraie dès que l'une au moins des deux propositions P et Q est vraie.

La proposition **"P ou Q" ne peut donc être fausse que si les deux propositions P, Q sont fausses en même temps**.

Si P et Q sont toutes deux vraies, la proposition "P ou Q" est vraie. Nous touchons ici du doigt une différence importante entre le langage courant et l'usage mathématique : dans le langage courant, le mot "ou" s'emploie aussi bien au sens large (inclusif) :

"Les enfants de moins de dix ans ou les personnes âgées payent demi-tarif"

que dans le sens strict (exclusif) :

"Fromage ou dessert"

en fin de menu (!).

➡ **Retenons : en mathématiques, le mot "ou" est toujours employé au sens large (inclusif), le sens strict (exclusif) étant toujours précisé à l'aide de la conjonction "ou bien".**

Nous nous arrêterons là pour l'instant, les autres connections (au sens : "jonction") logiques importantes seront introduites progressivement dans les chapitres ultérieurs. Nous avons pourtant touché du doigt les premières difficultés de l'étude ; il est souhaitable que cela ait créé chez l'étudiant un état d'esprit neuf, favorable à l'assimilation des exposés suivants.

Chapitre 2

Démontrer

1. IMPLICATIONS

A. IMPLIQUER

Le lecteur, quelles que soient ses connaissances et sa pratique des mathématiques, possède certainement par son cursus scolaire une idée intuitive de ce qu'est la déduction. Il s'agit désormais pour lui de préciser cette idée **dans le cadre mathématique**, où les règles sont strictes et ne tolèrent pas l'approximation. Un des buts de ce livre est de familiariser les futurs étudiants avec les règles logiques de la déduction.

Nous savons déjà que les mathématiques ont pour objet principal la manipulation des propositions ; l'essentiel de l'activité du mathématicien comme de l'utilisateur consiste à produire des affirmations vraies ; celles-ci doivent bien sûr posséder un intérêt mathématique, mais c'est une autre histoire… Aux niveaux les plus élémentaires, ces affirmations sont des égalités calculatoires, des “formules” :

“Si a et b sont deux nombres, $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$” ;

“Les racines de $x^2 - 3x + 2 = 0$ sont, dans $\mathbb{R}$, 1 et 2”.

Avec l'arithmétique et la géométrie, s'introduisent de nouveaux types de relations :

“Le triangle (A,B,C) est équilatéral” ;

“41 est un nombre premier” ;

sont des affirmations qui reposent sur un corps de définitions et de liens déjà plus étoffé.

L'acte qui consiste à énoncer une proposition vraie Q en partant de propriétés mathématiques connues (supposées vraies) et en utilisant des règles logiques est la **déduction** ; on dit aussi que l'on **prouve** ou que l'on **démontre** Q. La preuve de P est le plus souvent composée d'étapes élémentaires appelées en termes techniques **implications**. On emploie lorsque l'on produit des implications les verbes **déduire**, **impliquer** mais aussi **entraîner**, et plus rarement **inférer** ; on dit ainsi que de la propriété (proposition) P on **déduit** la propriété (proposition) Q, ou encore que P **entraîne** Q.

Pour noter l'implication, on utilise $\Rightarrow$ qui se lit et signifie : **implique**. Si P et Q sont deux propositions, "P $\Rightarrow$ Q" se lit donc : P implique Q, et se traduit par :

"La proposition P entraîne la proposition Q",

ou encore :

"La proposition Q se déduit de la proposition P".

"P $\Rightarrow$ Q" est une **nouvelle proposition**, formée à partir de P et de Q. "P $\Rightarrow$ Q vraie" signifie que le passage de P à Q est correct, c'est-à-dire que **Q est vraie dès que P l'est.** La règle logique **fondamentale** est la suivante, appelée syllogisme :

"Si les propositions P et P $\Rightarrow$ Q sont vraies,
la proposition Q est vraie".

DEUXIÈME LECTURE

Pour que l'implication P $\Rightarrow$ Q (supposée correctement justifiée) fournisse un **résultat vrai**, il faut partir d'une proposition vraie !

Exemple, simple et accessible

Partons de la proposition P : "Le soleil tourne autour de la terre" (dont presque tous s'accordent à penser qu'elle est fausse ; il serait facile de puiser dans les idées à la mode des exemples tout aussi faux, mais ils risqueraient d'être moins convaincants pour le lecteur). On déduit de ce fait, compte tenu de la forme ronde de la terre (admise depuis bien plus longtemps que l'héliocentrisme), l'existence d'un jour et d'une nuit, résultat vrai !

Le lecteur peut s'amuser à construire toutes sortes de raisonnements analogues : avec une prémisse (première proposition) fausse, on peut faire n'importe quoi. (Autre exemple : on a $4 > 5$ et $5 = 3$ donc $4 > 3$. Y réfléchir.)

On convient en mathématiques que l'implication P $\Rightarrow$ Q est vraie si P est fausse.

Ce fait peut paraître un peu déroutant au départ : nous sommes habitués à raisonner à partir de propositions P vraies ; de là, si l'implication P $\Rightarrow$ Q est juste, Q est vraie. Il est malencontreusement indispensable d'adjoindre aux règles logiques permettant de former des propositions vraies des cas non évidents, sans lesquels notre système serait incomplet et difficile à manipuler.

B. FORMER DES PROPOSITIONS VRAIES

SUBSTITUTION DANS UNE ÉGALITÉ

Si l'on dispose d'une égalité $f(x) = g(x)$ valable pour tous les x d'un ensemble E, la substitution à x de valeurs particulières donne des égalités vraies.