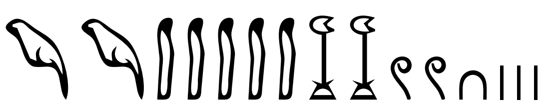
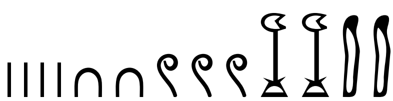
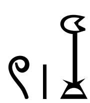
Leçon 1

Nombres entiers

En lisant avec attention le livre *Le calcul et la géométrie au temps des pharaons* de M. ROUSSELET, Thomas apprend que

> « Les premiers nombres qui ont été écrits en Égypte datent de 5 000 ans. La numération égyptienne utilise sept symboles pour écrire les nombres :
>
> pour 1
>
>  pour 10
>
>  pour 100
>
>  pour 1 000
>
>  pour 10 000
>
>  pour 100 000
>
>  pour 1 000 000
>
> Ces hiéroglyphes représentent, dans l'ordre, un bâton, une voûte, une corde enroulée, une fleur de lotus, une doigt pointé, un têtard et un dieu qui lève les bras vers le ciel.
>
> Lorsqu'on écrit un nombre, les hiéroglyphes sont juxtaposés dans n'importe quel ordre mais le même hiéroglyphe ne peut être dessiné plus de neuf fois. Pour lire un nombre, on additionne les valeurs de tous les hiéroglyphes qui ont été utilisés dans son écriture. Par exemple,
>
>  252 214
>
>  22 324
>
>  1 101. »

Il s'amuse alors à écrire des nombres à l'aide de ces hiéroglyphes :

2 002 123

Il remarque qu'on peut mettre les symboles dans n'importe quel sens. « Tiens », se dit-il, « ce n'est pas comme avec nos chiffres ».

> Pour écrire les nombres, on utilise dix chiffres : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.
> Dans l'écriture d'un nombre, chaque chiffre a une seule signification et changer la position d'un chiffre change sa signification.

123	1 centaine 2 dizaines 3 unités	$(1 \times 100) + (2 \times 10) + (3 \times 1)$
231	2 centaines 3 dizaines 1 unité	$(2 \times 100) + (3 \times 10) + (1 \times 1)$
312	3 centaines 1 dizaine 2 unités	$(3 \times 100) + (1 \times 10) + (2 \times 1)$

La numération arabe donna un apport révolutionnaire aux mathématiques : le zéro. D'ailleurs, voici les chiffres « véritablement » arabes de 0 à 9 :

٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Exercice 1

Dans les nombres suivants, chaque chiffre a été remplacé par un symbole. Indiquer le sens du chiffre caché derrière le carré.

1.▸ • • □ **3.▸** • □ • • **5.▸** • • •□•

2.▸ □ • • • • **4.▸** • • □ • • • • •

Exercice 2

Compléter :

$(5 \times 10\,000) + (9 \times 1\,000) + (8 \times 100) + (4 \times 10) + (1 \times 1) = \ldots\ldots$

$(2 \times 10) + (5 \times 1) + (3 \times 100) + (9 \times 1\,000) = \ldots\ldots$

$(3 \times 10\,000) + (5 \times 1\,000) + (7 \times 10) + (5 \times 1) = \ldots\ldots$

$(7 \times 100) + (4 \times 1\,000) + (6 \times 1) = \ldots\ldots$

▷ Addition de nombres entiers

Exercice 3

Ce matin, j'avais 1 315 timbres. J'en ai obtenu 79 nouveaux par mon grand-père. Combien en ai-je ce soir ?

Dans une addition, les nombres s'appellent *les termes* et le résultat s'appelle *la somme*.

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 345 \\ +\,9473 \\ \hline 9818 \end{array}$$

La somme de 345 et 9 473 est 9 818.
345 et 9 473 sont les termes de cette somme.

Exercice 4

Poser et effectuer les additions suivantes :

1.▶ 3 014 + 12 587

2.▶ 12 577 + 259

3.▶ 123 547 + 98 536

4.▶ 256 897 + 57 498

L'addition des nombres entiers est une opération qui possède de nombreuses propriétés :

Propriété

Dans un calcul ne comportant que des additions, on peut regrouper des termes ou les échanger.

On utilise principalement cette propriété pour le calcul mental :

$$125 + \underbrace{17 + 8} = 125 + 25 = 150$$

$$32 + 14 + 8 + 26 = \underbrace{32 + 8} + \underbrace{26 + 14} = 40 + 40 = 80$$

Ces propriétés sont également utiles pour prévoir ou vérifier rapidement la vraisemblance d'un résultat. Pour cela, on utilise des nombres entiers proches

Cours

de ceux que l'on souhaite additionner. Par exemple, la somme 1 185 + 3 604 va être proche de 1 200 + 3 600 = 4 800. La somme exacte est 1 185 + 3 604 = 4 789.

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 8\ 5 \\ +\ \ 3\ 6\ 0\ 4 \\ \hline 4\ 7\ 8\ 9 \end{array}$$

Exercice 5

On considère les nombres pairs à deux chiffres (10 ; 12 ; 14...). Quelle est la somme de tous ces nombres ? Expliquer la réponse.

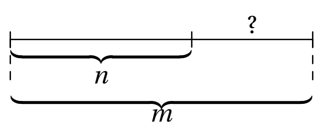
▷ Soustraction

Exercice 6

Un transporteur part de Paris avec 5 500 kg de marchandises. À Dijon, il dépose 750 kg de marchandises. Il ne s'arrête plus jusqu'à Besançon.
Quelle masse de marchandises a-t-il à son arrivée à Besançon ?

Soit m et n deux nombres tels que m soit plus grand que n. Pour trouver le nombre que l'on doit ajouter à n pour obtenir m, on effectue *la différence* $m - n$.

$$n + ? = m$$
$$? = m - n$$



$$\begin{array}{r} 9\ 4\ 7\ {}^{1}3 \\ -\quad 3\ {}_{1}4\ 5 \\ \hline 9\ 1\ 2\ 8 \end{array}$$

La différence de 9 473 et de 345 est 9 128. 345 et 9 473 sont les termes de cette différence.

La soustraction est donc étroitement liée à l'addition.

175 + 38 = 213 $\qquad$ 213 − 38 = 175 $\qquad$ 213 − 175 = 38

Exercice 7

Poser et effectuer les soustractions suivantes :

1.▸ 12 475 − 5 748

2.▸ 7 428 − 5 649

3.▸ 123 547 − 98 536

4.▸ 256 897 − 57 498

Attention à ne pas échanger l'ordre des calculs dans une soustraction !

▷ Multiplication

Exercice 8

Un fermier élève 78 vaches qui lui donnent chacune 16 litres de lait par jour. Combien obtient-il de lait par jour ?

Dans une multiplication, les nombres s'appellent *les facteurs* et le résultat s'appelle *le produit*.

$$\begin{array}{r} 1\,9 \\ \times\ 4\,8 \\ \hline 1\,5\,2 \\ 7\,6 \\ \hline 9\,1\,2 \end{array}$$

Le produit de 19 par 48 est 912.
19 et 48 sont les facteurs de ce produit.

Exercice 9

Poser et effectuer les multiplications suivantes :

1.▸ 304×57

2.▸ 78×259

3.▸ 725×206

4.▸ 429×578

La multiplication des nombres entiers, tout comme l'addition, est une opération qui possède de nombreuses propriétés :

Propriété

Dans un calcul ne comportant que des multiplications, on peut regrouper des facteurs ou les échanger.

Cours

On utilise principalement cette propriété pour le calcul mental :

$$2 \times 8 \times 5 = 2 \times 5 \times 8 = 10 \times 8 = 80$$

$$35 \times 8 = 35 \times 2 \times 4 = 70 \times 4 = 280$$

Lorsqu'on multiplie un nombre entier par 0, le produit obtenu est 0.

Exercice 10

Compléter les égalités suivantes :

$120 = \ldots \times 40$	$250 = 5 \times \ldots$	$14\,000 = 70 \times \ldots$
$1\,600 = 4 \times \ldots$	$360 = 90 \times \ldots$	$720 = 8 \times \ldots$
$2\,700 = 90 \times \ldots$	$3\,000 = 15 \times \ldots$	$2\,100 = 30 \times \ldots$

▷ Division euclidienne

Exercice 11

Dans un collège, il y a 162 élèves. On souhaite constituer des équipes de 13 joueurs. Combien peut-on faire d'équipes ? Y-a-t-il des élèves sans équipe ?

Un nombre non nul est un nombre différent de 0.

Soit a un nombre *entier* et b un nombre *entier non nul*.
La division euclidienne de a par b permet de trouver le nombre *entier* q de paquets de b unités que l'on peut mettre dans la quantité a et s'il existe éventuellement *un reste* r.

$$a = q \times b + r \qquad (r < b)$$

Le nombre q s'appelle *le quotient entier* de a par b.

$$\begin{array}{rr|l} & 1\,7\,2 & 9 \\ \cline{3-3} - & 9 & 1\,9 \\ \cline{2-2} & 8\,2 & \\ - & 8\,1 & \\ \cline{2-2} & 1 & \end{array}$$

* 172 est le dividende ;
* 9 est le diviseur.

$$172 = 19 \times 9 + 1 \qquad \text{et} \qquad 19 \times 9 < 172 < 20 \times 9$$

Attention au reste : il faut toujours penser à vérifier s'il est bien plus petit que le diviseur.

Cours

Exercice 12

Poser et effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

1.▸ $728 \div 5$ **2.▸** $1\,247 \div 9$ **3.▸** $4\,257 \div 7$.

Parfois, lorsqu'on effectue une division euclidienne, il arrive que le reste soit nul. Par exemple, c'est le cas de $4\,665 \div 15$:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & 4 & 6 & 6 & 5 & 1\ 5 \\ \cline{6-6}
- & 4 & 5 & & & 3\ 1\ 1 \\ \cline{2-3}
 & & 1 & 6 & & \\
 & - & 1 & 5 & & \\ \cline{3-4}
 & & & 1 & 5 & \\
 & & - & 1 & 5 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

On peut alors écrire que $4\,665 = 311 \times 15$ et dire que 4 665 est dans la table de multiplication de 15. C'est pourquoi on utilise le vocabulaire suivant :

> Soit a un nombre *entier* et b un nombre *entier non nul*. Lorsqu'on fait la division euclidienne de a par b, si le reste est nul alors on dit que :
>
> * a est *un multiple* de b ;
> * b *divise* a ;
> * b est *un diviseur* de a.

Avec la division euclidienne ci-dessus, on peut également affirmer que 4 665 est un multiple de 311.

Exercice 13

Est-ce que 399 est un multiple de 19 ?
Est-ce que 421 est un multiple de 34 ?

Parfois, il y a plus simple pour savoir si un nombre entier est un multiple d'un autre nombre entier.
Par exemple, 0 ; 14 ; 28 ; 42 ; 56 ; 70 sont des *multiples* de 14, car ils sont dans la table de multiplication de 14. Ici, il n'y a pas besoin de poser des divisions euclidiennes.
De plus, il existe des méthodes rapides pour savoir si un nombre entier est un multiple de 2 ; de 3 ; de 4 ; de 5 ou de 9. On les appelle *critères de divisibilité*.

Propriété

> Pour savoir si un nombre entier est divisible par 2, on regarde son chiffre des unités : si celui-ci est 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8, alors ce nombre est divisible par 2, sinon il ne l'est pas.

Comme 2 est le chiffre des unités de 342, alors 342 est divisible par 2.
325 n'est pas divisible par 2 car son chiffre des unités n'est ni 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8.

On dit aussi que l'on repère les nombres *pairs* avec cette méthode.

Propriété

> Pour savoir si un nombre entier est divisible par 5, on regarde son chiffre des unités : si celui-ci est 0 ou 5, alors ce nombre est divisible par 5, sinon il ne l'est pas.

Comme 325 a 5 comme chiffre des unités, alors 325 est divisible par 5.
342 n'est pas divisible par 5 car son chiffre des unités n'est ni 0 ni 5.

En regroupant les deux propriétés précédentes, on obtient un critère de divisibilité simple et bien connu : pour savoir si un nombre entier est divisible par 10, on regarde son chiffre des unités : si c'est 0, alors ce nombre est divisible par 10, sinon il ne l'est pas.

Savoir si un nombre est un multiple de 4 est tout aussi simple… Considérons le nombre 2 532. On peut l'écrire sous la forme

$$2\,532 = 2\,500 + 32.$$

Or, $2\,500 = 25 \times 100 = 25 \times 25 \times 4$. C'est déjà un multiple de 4. Est-ce que 32 est un multiple de 4 ? Évidemment oui ! Donc 2 532 est un multiple de 4. Seul 32 a posé problème : on peut étendre cette méthode à tous les nombres et donner la propriété suivante :