Utilisation de Scilab

L'utilisation du logiciel Scilab est présentée au fur et à mesure du cours. Cette page regroupe tous les chapitres où ce logiciel peut être utilisé, ainsi que les méthodes à connaitre.

Les bases de la programmation en Scilab

Les commandes classiques

Les méthodes à connaître

CHAPITRE 1

Logique et raisonnements

Pendant vos années de classes préparatoires, vous allez apprendre de nouvelles connaissances académiques mais également des façons de raisonner. Pour résoudre un problème de façon claire, logique et concise, il faut savoir choisir le bon raisonnement.

1 Notions de logique

1.1 Vocabulaire

Définition 1.1. — On appelle *proposition* toute énoncé $\mathcal{P}$ pouvant être vrai ou faux.

— Lorsqu'une proposition dépend d'une variable x, on la note $\mathcal{P}(x)$.

— On appelle *théorème* une proposition vraie.

— On appelle *corollaire* d'un théorème $\mathcal{P}$ tout théorème qui est une conséquence directe de $\mathcal{P}$.

Exemple 1.2. Considérons une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. $\mathcal{Q}$: "*La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante*" est une proposition.
   Elle ne dépend pas de l'entier n, qui est une variable dite *muette*. On peut la réécrire $\mathcal{Q}$: "*La suite* $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ *est croissante*".
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: "$u_n \leq u_{n+1}$" dépend de n.
   Elle ne signifie pas que la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante mais seulement que $u_n \leq u_{n+1}$ pour ce $n \in \mathbb{N}$ choisi.
3. Par exemple, si les premiers termes de la suite sont
   $$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad u_2 = 0,$$
   alors $\mathcal{P}(0)$ est vraie, $\mathcal{P}(1)$ est fausse et $\mathcal{Q}$ est fausse.
4. En revanche les propositions $\mathcal{Q}$ et (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$) sont équivalentes.

Exercice 1.3. Déterminer pour quels réels x la proposition $\mathcal{P}(x)$: "$x^2 \geq 1$" est vraie.

Remarque 1.4. 1. Le terme de proposition est explicite : on propose quelque chose. Pour que cela soit vrai et devienne un théorème, il faut le *démontrer*.

2. En pratique, on confond les terminologies *proposition* et *théorème*. Le nom de théorème est souvent réservé aux plus connus (par exemple le théorème des valeurs intermédiaires).
3. Dans ce cours, conformément à l'usage, on appellera proposition tous les théorèmes. Elles seront démontrées juste après l'énoncé, sauf dans les cas admis et précisés dans le programme de ECS.

Définition 1.5. Soit $\mathcal{P}$ une proposition,

— On définit la proposition (non $\mathcal{P}$) appelée *négation* de $\mathcal{P}$ par la table de vérité suivante :

$\mathcal{P}$	non $\mathcal{P}$
V	F
F	V

— Cette proposition est notée (non $\mathcal{P}$), $\overline{\mathcal{P}}$ ou encore $\neg\mathcal{P}$.

Remarque 1.6. 1. Attention, la négation est source de nombreuses erreurs.
2. Pour toute proposition $\mathcal{P}$, non(non $\mathcal{P}$) $= \mathcal{P}$.

Exemple 1.7. Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La négation de "pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$" n'est pas "pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n < 0$" mais "il existe (au moins) un $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < 0$".

1.2 Connecteurs logiques

Définition 1.8. Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

On définit les propositions ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) et ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) par les tables de vérité suivantes :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	F

Remarque 1.9. Les appellations *et* et *ou* correspondent à l'intuition. Le *ou* est dit inclusif : dire que ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) est vraie, c'est dire que soit $\mathcal{P}$, soit $\mathcal{Q}$, soit les deux sont vraies.

Exemple 1.10. Pour un dé lancé, on considère $\mathcal{P}$: "le numéro sorti est pair" et $\mathcal{Q}$: "le numéro sorti est supérieur ou égal à 3". Alors,

— ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) est : "le numéro sorti est $2, 3, 4, 5,$ ou 6".

— ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) est : "le numéro sorti est 4 ou 6".

Proposition 1.11 (Lois de Morgan)**.** *Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. Alors,*

$$\text{non}(\mathcal{P} \textit{ ou } \mathcal{Q}) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{non}\,\mathcal{P}) \textit{ et } (\text{non}\,\mathcal{Q})$$

$$\text{non}(\mathcal{P} \textit{ et } \mathcal{Q}) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{non}\,\mathcal{P}) \textit{ ou } (\text{non}\,\mathcal{Q})$$

Démonstration. On prouve ce résultat à l'aide des tables de vérités. □

1.3 Implication

Définition 1.12. Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

— On définit l'implication $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ par la table de vérité suivante :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

— L'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est appelée réciproque de l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

— On dit que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes et on note $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ lorsque $(\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P})$ et $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$.

Remarque 1.13. 1. Autrement dit, on dit que $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$ lorsque, si $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ est vraie.

2. Lorsque $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ est une condition suffisante de $\mathcal{Q}$ et que $\mathcal{Q}$ est une condition nécessaire de $\mathcal{P}$.
3. Lorsque $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ est vraie si et seulement si $\mathcal{Q}$ est vraie (parfois noté ssi). On dit que $\mathcal{P}$ est une condition nécessaire et suffisante de $\mathcal{Q}$.

Exemple 1.14. 1. Pour tout réel x on a $(x = x^2) \Rightarrow (x \geq 0)$, mais l'implication réciproque est fausse.

2. Considérons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, alors (f est la fonction nulle) $\Leftrightarrow$ (pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$).

Remarque 1.15. Pour montrer que $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, on raisonne souvent en deux temps : on montre d'abord le sens dit direct : $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, puis le sens réciproque $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

Exemple 1.16. Montrons la proposition : "pour tout $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^\star)^2, (\ln a < \ln b) \Leftrightarrow (a < b)$".

— Sens direct. Considérons $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^\star)^2$ tel que $\ln a < \ln b$. Alors, la fonction exp étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on a $\exp(\ln a) < \exp(\ln b)$ i.e. $a < b$.

— Sens réciproque. Considérons $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^\star)^2$ tel que $a < b$. Alors, la fonction ln étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$, on a $\ln a < \ln b$.

Exercice 1.17. Soit deux réels a et b, montrer que (pour tout $n \in \mathbb{N}, a2^n + b3^n = 0) \Leftrightarrow (a = b = 0)$.

Remarque 1.18. Parfois, il n'est pas nécessaire de procéder en deux étapes pour montrer que $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$. On effectue alors un raisonnement dit par équivalences. Dans ce cas, il faut bien vérifier que toutes les équivalences sont vraies et en particulier qu'en partant de la fin on peut bien revenir au début.

Exemple 1.19. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(x^2 \leq x) \Leftrightarrow (0 \leq x \leq 1)$.

Pour cela, considérons un réel x quelconque, alors

$$\begin{aligned} x^2 \leq x \Leftrightarrow x^2 - x \leq 0 &\Leftrightarrow x(x-1) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x \leq 0 \text{ et } x-1 \geq 0) \text{ ou } (x \geq 0 \text{ et } x-1 \leq 0) \\ &\Leftrightarrow (x \leq 0 \text{ et } x \geq 1) \text{ ou } (x \geq 0 \text{ et } x \leq 1) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

puisque la proposition $(x \leq 0 \text{ et } x \geq 1)$ est fausse. On vérifie qu'en partant que la proposition $(0 \leq x \leq 1)$ on peut bien "remonter" les équivalences et arriver à la proposition initiale $x^2 \leq x$. Ainsi, on a bien prouvé l'équivalence voulue.

Exercice 1.20. On note $\mathcal{P}$: "$x = 1$" et $\mathcal{Q}$: "$x(2x-1) = 3x$" et $\mathcal{R}$: "$x = 2$". Déterminer si les équivalences $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ puis $\mathcal{R} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ sont vraies.

2 Quantificateurs

2.1 Définition

Définition 2.1. — Le signe $\forall$ placé devant une variable x signifie "*quel que soit x*".

— Le signe $\exists$ placé devant une variable x signifie "*il existe (au moins) un x*".

Remarque 2.2. 1. Les symboles $\forall$ et $\exists$ sont appelés quantificateurs. Ils permettent d'écrire une proposition de façon claire, lisible et concise.

2. On trouve également parfois le signe $\exists!$: placé devant une variable x il signifie "*il existe un unique x*".

Exemple 2.3. 1. Considérons une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et les propositions $\mathcal{Q}$: "La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante" et $\mathcal{P}(n)$: "$u_n \leq u_{n+1}$" pour $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\mathcal{Q} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)).$$

2. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors la proposition $\mathcal{P}$: "f est croissante" s'écrit

$$\mathcal{P} : \text{"}\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \text{ si } x \leq y \text{ alors } f(x) \leq f(y)\text{"}.$$

Exercice 2.4. 1. Enoncer les propositions suivantes, sont-elles vraies ?
- — $\mathcal{P}_1$: "$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$"
- — $\mathcal{P}_2$: "$\exists x \in]0, +\infty[, x^2 - 1 = 0$"

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Ecrire la proposition "f ne s'annule pas" avec des quantificateurs.

Remarque 2.5. 1. Attention à l'ordre : la proposition $(\forall x, \exists y, \mathcal{P}(x,y))$ est a priori différente de $(\exists y, \forall x, \mathcal{P}(x,y))$.

2. Dans la proposition $(\forall x, \exists y, \mathcal{P}(x,y))$, il faudrait préciser que y dépend de x et le noter $y(x)$. En pratique, on écrit ce détail uniquement lorsqu'il y a un risque de confusion.

Exercice 2.6. On considère les propositions

$$\mathcal{P}_1 : \text{“}\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n+1\text{”}$$

$$\mathcal{P}_2 : \text{“}\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, n \leq x < n+1\text{”}$$

Qu'énoncent ces propositions ? Sont-elles vraies ?

2.2 Négation et quantificateurs

Proposition 2.7. *1. La négation de* $(\forall x, \mathcal{P}(x))$ *est* $(\exists x, \operatorname{non} \mathcal{P}(x))$.

2. La négation de $(\exists x, \mathcal{P}(x))$ *est* $(\forall x, \operatorname{non} \mathcal{P}(x))$.

Exemple 2.8. La négation de la proposition "il existe un jour de semaine sans cours" est "il y a cours tous les jours de la semaine".

Exercice 2.9. Soit f une fonction réelle. Ecrire avec des quantificateur la négation de $\mathcal{P}$: "f est croissante sur $\mathbb{R}$".

3 Raisonnements

3.1 La contraposition

Définition 3.1. Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. L'implication $(\operatorname{non} \mathcal{Q} \Rightarrow \operatorname{non} \mathcal{P})$ s'appelle la contraposée de l'implication $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$.

Exemple 3.2. 1. La contraposée de la proposition "s'il pleut alors le sol est mouillé" est "si le sol n'est pas mouillé alors il ne pleut pas".

2. La contraposée de $(x \geq 0 \Rightarrow x^2+1 > 0)$ est $(x^2+1 \leq 0 \Rightarrow x < 0)$.

Proposition 3.3. *Une implication et sa contraposée sont équivalentes :*

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \quad \Leftrightarrow \quad (\operatorname{non} \mathcal{Q} \Rightarrow \operatorname{non} \mathcal{P})$$

Démonstration. Cela découle des tables de vérité. □

Exemple 3.4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, montrons l'implication

$$(xy = 0) \Rightarrow (x = 0 \text{ ou } y = 0).$$

Pour cela, on montre la contraposée : $(x \neq 0 \text{ et } y \neq 0) \Rightarrow (xy \neq 0)$, ce qui est immédiat.

Exercice 3.5. Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Montrer que $(np = 1) \Rightarrow (n = p = 1)$.

3.2 Démonstration par l'absurde

Proposition 3.6. *Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions, alors*

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \quad \Leftrightarrow \quad ((\mathcal{P} \text{ et } \operatorname{non} \mathcal{Q}) \text{ est fausse})$$

Démonstration. De même, cela découle des tables de vérité. □

Remarque 3.7.
1. Pour montrer par l'absurde que $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$, on suppose que $\mathcal{P}$ est vraie et $\mathcal{Q}$ est fausse, puis on cherche à établir une contradiction.
2. Il faut toujours préciser que l'on effectue un raisonnement par l'absurde ainsi que l'endroit où apparait la contradiction.

Exemple 3.8. Montrons que pour tout nombre réel $x \neq 1$ on a $\frac{x+1}{x-1} \neq 1$.

Supposons par l'absurde que $\frac{x+1}{x-1} = 1$, alors $x + 1 = x - 1$ et $1 = -1$, ce qui apporte la contradiction. Ainsi, on a bien $\frac{x+1}{x-1} \neq 1$ pour tout $x \neq 1$.

Exercice 3.9.
1. Résoudre l'équation $\sqrt{x+2} = x$.
2. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

3.3 Démonstration par récurrence

Proposition 3.10 (Récurrence simple)**.** *Considérons une proposition $\mathcal{P}(n)$ qui dépend de $n \in \mathbb{N}$. On suppose que*

- *$\mathcal{P}(n_0)$ est vraie,*
- *pour un entier naturel n fixé supérieur ou égal à n_0, la proposition $\mathcal{P}(n)$ implique la proposition $\mathcal{P}(n+1)$.*

Alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

Remarque 3.11.
1. La preuve de $\mathcal{P}(n_0)$ s'appelle l'initialisation de la récurrence. L'implication $(\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1))$ pour un n fixé s'appelle l'hérédité de la proposition.
2. Dans l'étude de l'hérédité on ne suppose pas que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n, mais pour un entier n fixé.

Exemple 3.12. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{u_n}$. Montrons alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 1.

Pour cela, montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}(n)$: "$u_n = 1$".

- Initialisation : $u_0 = 1$ par définition donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : considérons $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors par hypothèse de récurrence, on a $u_n = 1$ et

$$u_{n+1} = \frac{3u_n - 2}{u_n} = \frac{3 \times 1 - 2}{1} = 1.$$

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.