

**Le sujet**

*L'objet du problème est d'aborder quelques questions mathématiques relatives au comportement asymptotique de systèmes dynamiques discrets ou continus susceptibles de modéliser l'évolution temporelle de divers phénomènes, en particulier économiques (croissance économique, prix d'équilibre, etc...).*

*Les trois parties du problème sont indépendantes.*

**Dans tout le problème :**

- On note  $p$  un entier supérieur ou égal à 1.
- Pour tout vecteur  $b \in \mathbb{R}^p$ , on note  $B$  la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ .
- La transposée d'une matrice  $A$  est notée  $A^T$ . La matrice identité de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  est notée  $I_p$ .

- Pour toute application  $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^p$   
 $t \mapsto x(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))$ , on note :

★  $x'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_p(t))$  en tout point  $t \in \mathbb{R}_+$  où les fonctions  $x_1, \dots, x_p$  sont dérivables ;

★  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t), \dots, \lim_{t \rightarrow +\infty} x_p(t) \right)$  lorsque les fonctions  $x_1, \dots, x_p$  admettent des limites finies lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

- Pour toute suite  $(x(n))_{n \in \mathbb{N}} = (x_1(n), \dots, x_p(n))_{n \in \mathbb{N}}$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^p$  pour laquelle les suites  $(x_1(n))_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (x_p(n))_{n \in \mathbb{N}}$  sont convergentes, on définit la limite de la suite  $(x(n))_{n \in \mathbb{N}}$  par :

★  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x(n) = \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} x_1(n), \dots, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_p(n) \right)$ .

### Partie I. Deux exemples de pilotages linéaires

Soit  $A$  une matrice non nulle de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  et  $b$  un vecteur de  $\mathbb{R}^p$ . Soit  $x_1, \dots, x_p$   $p$  fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}_+$ .

On dit qu'une application  $x : t \mapsto x(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t))$  définie sur  $\mathbb{R}_+$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ , est *pilotée par le couple*  $(A, b)$  si, pour tout réel  $t \geq 0$ , les matrices colonnes  $X(t)$  et  $X'(t)$  de  $x(t)$  et  $x'(t)$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^p$  vérifient le système :  $\forall t \geq 0, X'(t) = AX(t) + b$ .

On appelle *équilibre du système piloté par le couple*  $(A, b)$ , tout vecteur  $x^* \in \mathbb{R}^p$  vérifiant :  $AX^* + B = 0$ .

On dit qu'un équilibre  $x^*$  est *attractif* si pour toute application  $x$  pilotée par  $(A, b)$ , on a :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*$ .

1. *Le cas*  $p = 1$ .

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$  et  $x$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ , à valeurs réelles, vérifiant :  $\forall t \geq 0, x'(t) = ax(t) + b$ .

a) Calculer la dérivée de la fonction  $y : t \mapsto \left(x(t) + \frac{b}{a}\right) e^{-at}$ .

b) En déduire que pour tout  $t \geq 0$ , on a :  $x(t) = -\frac{b}{a} + \left(x(0) + \frac{b}{a}\right) e^{at}$ .

c) On identifie  $a$  à la matrice de  $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$  dont l'unique coefficient est  $a$ . Montrer que le système piloté par le couple  $(a, b)$  admet un unique équilibre, puis montrer que cet équilibre est attractif si et seulement si  $a < 0$ .

2. *Exemple 1.* Soit  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  et  $b = (1, 1)$ . Soit  $x : t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$  une application définie sur  $\mathbb{R}_+$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , pilotée par le couple  $(A, b)$ .

a) Déterminer l'unique équilibre  $x^*$  du système piloté par le couple  $(A, b)$ .

b) Justifier l'existence d'une matrice inversible  $Q$  telle que la matrice  $Q^{-1}AQ$  soit diagonale.

Pourquoi peut-on choisir la matrice  $Q$  de telle manière que  $Q^{-1} = Q^T$  ?

c) Trouver deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  ( $\lambda \leq \mu$ ) et une matrice inversible  $Q$  vérifiant :

$$Q^{-1} = Q^T \text{ et } Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

d) Pour tout  $t \geq 0$ , on pose :  $W(t) = Q^T X(t)$ .

(i) Vérifier pour tout  $t \geq 0$ , l'égalité :

$$W'(t) = DW(t) + Q^T B \quad \text{où : } D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

(ii) À l'aide des résultats de la question 1, en déduire que l'équilibre  $x^*$  est attractif.

3. On suppose  $p \geq 2$ . Soit  $\mathcal{B}_p = (e_1, \dots, e_p)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^p$  et  $u_p$  l'unique endomorphisme de  $\mathbb{C}^p$  tel que  $u_p(e_1) = e_p$  et pour tout  $k \in \llbracket 2, p \rrbracket$ ,  $u_p(e_k) = e_{k-1}$ .

a) Écrire la matrice  $A_p$  de l'endomorphisme  $u_p$  dans la base  $\mathcal{B}_p$ . Quel est son rang ?

- b) Soit  $\varepsilon \in \mathbb{C}$  une racine  $p$ -ième de l'unité et  $G$  la matrice colonne de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$  de composantes  $1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{p-1}$ . Montrer que  $G$  est un vecteur propre de  $A_p$  et préciser la valeur propre complexe associée.
- c) Montrer que l'endomorphisme  $u_p$  est diagonalisable.
- d) Montrer que le polynôme  $X^p - 1$  de  $\mathbb{C}[X]$  est un polynôme annulateur de  $u_p$ . L'endomorphisme  $u_p$  admet-il un polynôme annulateur non nul de degré strictement inférieur à  $p$  ?
- e) Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ . L'endomorphisme  $P(u_p)$  de  $\mathbb{C}^p$  est-il diagonalisable ? Quelles sont ses valeurs propres ?

4. *Exemple 2.* Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels tels que  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\alpha \neq \beta$ ,  $\alpha + \beta \neq 1$  et

$$M = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & \beta \\ \beta & -1 & \alpha \\ \alpha & \beta & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

- a) On note  $A$  la matrice  $A_p$  de la question 3 dans le cas où  $p = 3$ .
- (i) Déterminer un polynôme  $P$  à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2, tel que  $M = P(A)$ .
- (ii) En déduire les valeurs propres complexes de  $M$  ainsi que leurs parties réelles et imaginaires respectives.
- b) Soit  $c = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ .
- (i) Trouver l'unique équilibre  $x^*$  du système piloté par le couple  $(M, c)$ .
- (ii) Vérifier que l'application  $x : t \mapsto x(t) = x^* + e^{(\alpha+\beta-1)t}c$  est pilotée par le couple  $(M, c)$ .
- (iii) En déduire une condition nécessaire portant sur  $\alpha$  et  $\beta$  pour que l'équilibre  $x^*$  soit attractif.

On suppose désormais que la condition précédente est réalisée.

- c) On pose :  $N = M^T + M$ .
- (i) Quelles sont les valeurs propres de la matrice  $N$  ?
- (ii) Déterminer un réel  $\theta > 0$  tel que toutes les valeurs propres de  $N$  soient inférieures ou égales à  $-2\theta$ .
- d) On rappelle que  $c = (1, 1, 1)$ . On considère une application  $x$  pilotée par le couple  $(M, c)$ .

On note  $y$  l'application définie sur  $\mathbb{R}_+$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^3$ , telle que  $y : t \mapsto x(t) - x^*$  et  $\varphi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$ , à valeurs réelles, telle que  $\varphi : t \mapsto e^{2\theta t} \|Y(t)\|^2$ , où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne canonique de  $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ .

- (i) Vérifier que l'application  $y$  est pilotée par le couple  $(M, 0_{\mathbb{R}^3})$ .
- (ii) Montrer que  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \varphi'(t) = e^{2\theta t} \times Y(t)^T (N + 2\theta I_3) Y(t).$$

- (iii) Montrer que la fonction  $\varphi$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .
- (iv) En déduire que l'équilibre  $x^*$  est attractif.

## Partie II. Un exemple de pilotage non linéaire

Un exemple de *pilotage non linéaire* est fourni par un modèle de croissance économique endogène à deux secteurs dans lequel le taux de croissance du stock de capital et le taux de croissance du stock de connaissances sont représentés, depuis une date choisie comme origine, par des fonctions  $x_1$  et  $x_2$  respectivement.

Dans ce modèle où  $\rho$  désigne un paramètre réel strictement positif, les deux fonctions  $x_1$  et  $x_2$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}_+$ , à valeurs réelles, et vérifient le système :

$$\forall t \geq 0, \begin{cases} x_1'(t) = F_1(x_1(t), x_2(t)) \\ x_2'(t) = F_2(x_1(t), x_2(t)) \end{cases} \quad (S)$$

dans lequel les deux fonctions  $F_1$  et  $F_2$  définies sur  $\mathbb{R}^2$ , à valeurs réelles, sont données par :

$$\forall (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} F_1(u_1, u_2) = (-u_1 + \rho(u_2 - u_1) + 1) u_1 \\ F_2(u_1, u_2) = (-u_2 + \rho(u_1 - u_2) + 1) u_2 \end{cases}.$$

5. a) Pour tout réel  $\nu > -1$ , on pose :

$$\forall t \geq 0, x_1(t) = x_2(t) = \frac{1}{1 + \nu e^{-t}}.$$

Vérifier que l'application  $x : t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$  est solution du système (S).

- b) En déduire que pour tout réel  $c \in ]0, 1[$ , il existe une solution de (S) à valeurs dans  $[c, +\infty[^2$ .
- c) Quel est l'unique couple  $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  vérifiant  $F_1(x_1^*, x_2^*) = 0$  et  $F_2(x_1^*, x_2^*) = 0$  ?
- d) Toutes les solutions de (S) convergent-elles vers  $x^*$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  ?

6. Pour tout réel  $r$ , on note  $q_r$  la forme quadratique sur  $\mathbb{R}^2$  associée à la matrice symétrique  $Q_r = \begin{pmatrix} 1 & -r \\ -r & 1 \end{pmatrix}$ .

On note  $\mathcal{C}_r$  l'ensemble défini par :  $\mathcal{C}_r = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 / q_r(u_1, u_2) = 1\}$ .

- a) Pour quelles valeurs de  $r$  la forme quadratique  $q_r$  est-elle définie positive ? Que peut-on dire alors de la partie  $\mathcal{C}_r$  de  $\mathbb{R}^2$  ?  
Dans toute la suite de cette question,  $r$  et  $s$  sont deux réels vérifiant les inégalités :  $0 < s < r < 1$ .
- b) Justifier que l'ensemble  $\{q_s(u_1, u_2); (u_1, u_2) \in \mathcal{C}_r\}$  admet une borne inférieure, notée  $m_{r,s}$  et une borne supérieure, notée  $M_{r,s}$  et que ces deux bornes sont atteintes.
- c) Justifier que la contrainte d'appartenance à l'ensemble  $\mathcal{C}_r$  est non critique.
- d) Énoncer la condition nécessaire du premier ordre pour un extremum de  $q_s$  sous la contrainte  $\mathcal{C}_r$ .
- e) En déduire les valeurs de  $m_{r,s}$  et  $M_{r,s}$  et établir l'existence d'un réel  $\mu$  tel que :

$$\forall (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, q_s(u_1, u_2) \leq \mu q_r(u_1, u_2).$$

7. On conserve les notations de la question 6.

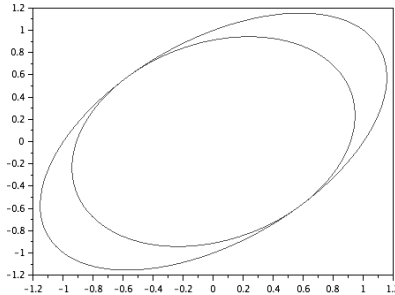
a) Soit  $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $(u_1, u_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(v_1 - v_2, v_1 + v_2)$ .

Vérifier que  $(u_1, u_2) \in \mathcal{C}_r$  si et seulement si :  $(1 - r)(v_1)^2 + (1 + r)(v_2)^2 = 1$ .

On se place désormais dans le cas où  $r = \frac{1}{2}$  et  $s = \frac{1}{4}$ .

b) Pour faire tracer par *Scilab* le domaine  $\mathcal{C}_r$ , on peut utiliser le code suivant qui donne le graphique ci-dessous :

```
(1) n=100;
(2) theta=linspace(0,2*pi,n);
(3) ct=cos(theta);
(4) st=sin(theta);
(5) Cr=[ct-(1/sqrt(3))*st;ct+(1/sqrt(3))*st];
(6) plot(Cr(1,:),Cr(2,:))
```



En s'appuyant sur le résultat de la question 7.a), expliquer la méthode employée.

On précisera la signification de la ligne (2) ainsi que le format et le contenu des matrices  $\text{Cr}$  et  $\text{Cr}(1, :)$ .

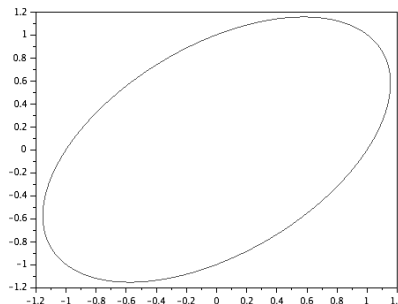
c) Soit  $z_0 > 0$  une valeur affectée à la variable  $z$  utilisée ci-dessous. Compléter la ligne (7) afin de tracer la ligne de niveau  $z_0$  de la fonction  $q_s$ .

```
(7) Csz=[sqrt(z)*(??*ct+??*st);sqrt(z)*(??*ct+??*st)];
```

```
(8) plot(Csz(1,:),Csz(2,:))
```

d) Le graphique suivant a été obtenu à l'aide des deux scripts précédents pour une valeur  $z_0$  affectée à la variable  $z$ . Laquelle ?

On justifiera la réponse donnée et on précisera pourquoi les deux courbes ont des tangentes communes.



8. Soit  $c$  un réel de  $]0, 1[$  et  $x$  une solution de  $(S)$  à valeurs dans  $[c, +\infty[^2$ .

On pose pour tout  $t \geq 0$  :  $y_1(t) = x_1(t) - 1$  et  $y_2(t) = x_2(t) - 1$ .

Pour  $s = \frac{\rho}{1+\rho}$ , on note  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$ , à valeurs réelles, telle que  $f(t) = q_s(y_1(t), y_2(t))$ .

a) Vérifier pour tout  $t \geq 0$ , l'égalité

$$f'(t) = -2(1+\rho) \left( x_1(t) (y_1(t) - s y_2(t))^2 + x_2(t) (y_2(t) - s y_1(t))^2 \right).$$

b) En déduire que pour  $r = \frac{2s}{1+s^2}$ , on a pour tout  $t \geq 0$  :

$$f'(t) \leq -2c \times \frac{1-s}{1-r} \times q_r(y_1(t), y_2(t)).$$

c) Justifier pour tout  $t \geq 0$ , l'inégalité :  $f'(t) \leq -2c f(t)$ . En déduire que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$ .

9. Quelle propriété peut-on déduire de l'étude précédente pour toute solution de  $(S)$  dont chacune des composantes admet un minorant strictement positif ?

### Partie III. Pilotage pas à pas dans un contexte aléatoire

Dans cette partie, on s'intéresse à un exemple de système se présentant sous la forme d'une équation de récurrence dont les coefficients sont soumis à une perturbation aléatoire.

On suppose  $p \geq 2$ . Soit  $A$  une matrice non nulle de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  et  $b$  un vecteur de  $\mathbb{R}^p$ .

Soit  $(x(n))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de vecteurs de  $\mathbb{R}^p$  définie par son terme initial  $x(0)$  et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X(n+1) = AX(n) + B.$$

On appelle *équilibre du système piloté pas à pas par le couple  $(A, b)$* , tout vecteur  $x^* = (x_1^*, \dots, x_p^*) \in \mathbb{R}^p$  qui vérifie :  $X^* = AX^* + B$ .

On suppose qu'il existe une matrice inversible  $Q \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  telle que la matrice  $D = Q^{-1}AQ$  soit diagonale et que tous les coefficients diagonaux  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  de  $D$  appartiennent à l'intervalle ouvert  $] -1, +1[$ .

10. Montrer que le système piloté pas à pas par le couple  $(A, b)$  admet un unique équilibre  $x^*$ .

La perturbation aléatoire du système se traduit par le fait que les coordonnées de  $x^*$  sont des paramètres inconnus qu'on peut chercher à estimer à partir des données observées que constituent les valeurs successives de vecteurs aléatoires  $y(n) = (y_1(n), \dots, y_p(n))$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$  et soumis au système perturbé.

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  centrées et admettant chacune un moment d'ordre 2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $v_n = V(U_n)$  la variance de  $U_n$ .

Soit  $x(0) \in \mathbb{R}^p$  et  $(y(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$  définie par :

$$\begin{cases} Y(1) = (A + U_1 I_p) X(0) + B \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, Y(n+1) = (A + U_{n+1} I_p) Y(n) + B \end{cases}$$

où, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $Y(n)$  est la matrice colonne  $(y_k(n))_{1 \leq k \leq p}$ .

11. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\mathbf{E}(y(n))$  le vecteur  $(E(y_1(n)), \dots, E(y_p(n))) \in \mathbb{R}^p$  et  $\mathbf{E}(Y(n))$  désigne la matrice de ses coordonnées dans la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ .

a) Calculer  $\mathbf{E}(Y(1))$  et justifier pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'égalité :

$$\mathbf{E}(Y(n+1)) - X^* = A(\mathbf{E}(Y(n)) - X^*).$$

b) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{E}(y(n)) = x^*$ .

12. Soit  $(z(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$  définie par :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $Z(n) = Q^{-1}Y(n)$ .

a) Montrer pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  :

$$V(z_k(n+1)) = (\lambda_k^2 + v_{n+1}) V(z_k(n)) + v_{n+1} (E(z_k(n)))^2.$$

b) En déduire que si la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente et de limite nulle, alors il existe un réel  $c_k \in ]0, 1[$ , un entier naturel  $N$  et un réel  $M_k > 0$  tels que :  $\forall n \geq N$ ,  $V(z_k(n+1)) \leq c_k V(z_k(n)) + M_k v_{n+1}$ .

13. On suppose que la série de terme général  $v_n$  est convergente. Soit  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ .

Avec les notations de la question 12.b), on pose pour tout  $m \in \mathbb{N}$  :

$$\alpha_m = V(z_k(N+m)) \quad \text{et} \quad w_m = M_k v_{N+m+1}.$$

a) Montrer que pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on a :  $\alpha_{m+1} \leq (c_k)^{m+1} \alpha_0 + \sum_{j=0}^m w_j (c_k)^{m-j}$ .

b) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(z_k(n)) = 0$ .

c) Montrer que la suite  $(y_k(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en probabilité vers  $x_k^*$ .

*Grâce aux résultats des questions 11.b) et 13.c), on peut dire que  $(y(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite d'estimateurs de  $x^*$  asymptotiquement sans biais et convergente.*

## Le corrigé commenté

### Partie I. Deux exemples de pilotages linéaires

1. a) La fonction  $y$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^+$  comme somme et produit de fonctions qui le sont et on a :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}^+, y'(t) &= x'(t)e^{-at} - a \left[ x(t) + \frac{b}{a} \right] e^{-at} \\ &= e^{-at} [x'(t) - a x(t) - b]\end{aligned}$$

et donc, par hypothèse sur  $x$  :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+, y'(t) = 0}$$

#### Commentaire

Même si l'énoncé ne le demande pas explicitement, il était préférable de penser à justifier que la fonction  $y$  était dérivable avant de la dériver, surtout qu'il s'agit de la première question.

- b) D'après le résultat précédent, la fonction  $y$  est constante sur  $\mathbb{R}^+$ , donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, y(t) = y(0),$$

c'est-à-dire :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \left[ x(t) + \frac{b}{a} \right] e^{-at} = x(0) + \frac{b}{a}$$

d'où :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, x(t) + \frac{b}{a} = \left[ x(0) + \frac{b}{a} \right] e^{at}$$

et donc :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+, x(t) = -\frac{b}{a} + \left[ x(0) + \frac{b}{a} \right] e^{at}}$$

- c) ► Un équilibre du système piloté par le couple  $(a, b)$  est une solution  $x^*$  de l'équation  $ax + b = 0$ , donc, comme  $a$  n'est pas nul :

Le système piloté par le couple  $(a, b)$  a un unique équilibre, qui est :  $x^* = -\frac{b}{a}$ .