ESCP Europe 2016

Sujet n° 1

Le sujet

A. Exercice avec préparation

Soit la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant que l'on explicitera. Montrer que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

2. Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on pose : $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^\pi \cos(p\theta)\,\cos(q\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

   a) Montrer que pour tous réels a et b, on a :

$$\cos(a)\,\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right].$$

   b) Calculer $I_{p,q}$.

3. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$, montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente. On la note $\langle P, Q\rangle$.
   Montrer que $(P, Q) \mapsto \langle P, Q\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $||\cdot||$ la norme associée.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(T_0, \ldots, T_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Cette base est-elle orthonormale ?
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\langle X^n, T_n\rangle$.

6. En déduire, pour tout entier $n \geqslant 1$, la valeur de :

$$d = \inf_{(a_0,\ldots,a_{n-1})\in\mathbb{R}^n} \left(\sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{\left(t^n - (a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0)\right)^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t} \right).$$

B. Exercice sans préparation

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On définit les variables aléatoires D_1 et D_2 par :

$$D_1 = \lfloor 10X \rfloor \quad \text{et} \quad D_2 = \left\lfloor 10^2 X - 10D_1 \right\rfloor.$$

1. Que représentent les variables aléatoires D_1 et D_2 ?
2. Déterminer les lois des variables aléatoires D_1 et D_2.
3. D_1 et D_2 sont-elles indépendantes ?

Le corrigé commenté

A. Exercice avec préparation

Commentaire

L'exercice proposé ici commence avec trois questions très classiques : polynômes de Tchebychev, calcul d'une intégrale à l'aide de formules de trigonométrie dans la deuxième question, et étude d'un produit scalaire. Il est donc vraisemblable que le jury s'attende à voir le candidat traiter ces questions correctement et avec aisance.

1. ► On peut remarquer que :

$$T_1 = 2^0 X, \quad T_2 = 2^1 X^2 - 1 \quad \text{et} \quad T_3 = 2^2 X^3 - 3X.$$

On montre alors par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathscr{H}(n)$: « T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} » est vraie.

◇ Comme $T_1 = X$ et $T_2 = 2X^2 - 1$, $\mathscr{H}(1)$ et $\mathscr{H}(2)$ sont vraies.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathscr{H}(n)$ et $\mathscr{H}(n+1)$ sont vraies. Comme T_{n+1} et T_n sont des polynômes, $2XT_{n+1}$ et T_n sont des polynômes, donc T_{n+2} est un polynôme.
De plus, comme T_{n+1} est de degré $n+1$ et de coefficient dominant 2^n, $2XT_{n+1}$ est de degré $n+2$ et de coefficient dominant 2^{n+1}. Comme T_n est de degré n (strictement inférieur à $n+2$), le terme dominant de T_{n+2} est donc celui de $2XT_{n+1}$, et on en déduit que T_{n+2} est de degré $n+2$ et de coefficient dominant 2^{n+1}.
Ainsi, si $\mathscr{H}(n)$ et $\mathscr{H}(n+1)$ sont vraies, alors $\mathscr{H}(n+2)$ l'est aussi.

◇ On en déduit que $\mathscr{H}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $T_0 = 1$ est un polynôme de degré 0 et de coefficient dominant 1, on peut alors conclure :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 1 si $n = 0$, 2^{n-1} si $n \geqslant 1$.

► Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition

$$\mathscr{P}(n) : \text{ « } \forall\, \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \text{ »}$$

est vraie.

◇ Comme $T_0 = 1$ et $T_1 = X$, on a :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0 \times \theta) \quad \text{et} \quad T_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$$

donc $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies. On a alors :

$$\begin{aligned}\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)\, T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta)) \\ &= 2\cos(\theta)\ \cos((n+1)\theta)) - \cos(n\theta) \\ &= \cos(\theta + (n+1)\theta) + \cos(\theta - (n+1)\theta) - \cos(n\theta) \\ &= \cos((n+2)\theta).\end{aligned}$$

Ainsi, si $\mathscr{H}(n)$ et $\mathscr{H}(n+1)$ sont vraies, alors $\mathscr{H}(n+2)$ l'est aussi.

◇ On peut alors conclure :

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)}$$

Commentaire

• On pouvait aussi remarquer que la suite $(T_n(\cos(\theta)))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique

$$(E) : x^2 - 2\cos(\theta)\, x + 1 = 0.$$

Compte tenu de la question suivante, on peut penser que c'est ce qu'avait en tête le concepteur du sujet. Mais cette méthode était plus longue et supposait de distinguer les cas selon que le discriminant, égal à $(2i\sin(\theta))^2$, est nul ou non.

• Rappelons que lors d'une épreuve orale, il est préférable de s'adresser directement au jury et de ne pas trop écrire au tableau. La première récurrence de cette question peut ainsi être entièrement présentée oralement. Quant à la seconde, seul le détail du calcul mérite d'être fait au tableau.

2. a) D'après la formule d'Euler, on a :

$$\begin{aligned}\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \cos(a)\ \cos(b) &= \frac{e^{ia} + e^{-ia}}{2} \times \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} \\ &= \frac{e^{i(a+b)} + e^{-i(a+b)} + e^{i(a-b)} + e^{-i(a-b)}}{4} \\ &= \frac{2\cos(a+b) + 2\cos(a-b)}{4}\end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \cos(a)\ \cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]}$$

Commentaire

Il est toujours délicat de savoir quel type de justification est attendue quand l'énoncé demande de montrer une formule de trigonométrie. La méthode proposée ici n'est qu'un moyen de retrouver la formule (puisque l'écriture exponentielle des nombres complexes découle des formules de trigonométrie, et non l'inverse).
On pouvait sans doute aussi rappeler que :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\,\cos(b) - \sin(a)\,\sin(b) \\ \cos(a-b) = \cos(a)\,\cos(b) + sin(a)\,\sin(b) \end{cases}$$

puis additionner les deux lignes.

b) Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. La fonction $\theta \mapsto \cos(p\theta)\,\cos(q\theta)$ est continue sur $[0,\pi]$ comme produit de fonctions qui le sont. D'après la formule précédente, on peut alors écrire :

$$I_{p,q} = \int_0^\pi \frac{\cos((p+q)\theta) + \cos((p-q)\theta)}{2}\,\mathrm{d}\theta.$$

Trois cas se présentent alors.

◇ Si $p = q = 0$, alors on a :

$$\begin{aligned} I_{p,p} &= \int_0^\pi 1 \cdot \mathrm{d}\theta \\ &= \pi. \end{aligned}$$

◇ Si $p = q$ et $p \neq 0$, alors on a :

$$\begin{aligned} I_{p,p} &= \int_0^\pi \frac{\cos(2p\theta)+1}{2}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \left[\frac{\sin(2p\theta)}{4p} + \frac{\theta}{2}\right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

◇ Si $p \neq q$, alors $p+q$ et $p-q$ sont non nuls et :

$$\begin{aligned} I_{p,p} &= \left[\frac{\sin((p+q)\theta)}{2(p+q)} + \frac{\sin((p-q)\theta)}{2(p-q)}\right]_0^\pi \\ &= 0. \end{aligned}$$

On peut alors conclure :

$$\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ I_{p,q} = \begin{cases} \pi & \text{si } p = q = 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } p = q \text{ et } p \neq 0 \\ 0 & \text{si } p \neq q \end{cases}}$$

Commentaire

• La géométrie ayant (peut-être ?) été oubliée depuis longtemps par la plupart des candidats, nous avons choisi d'utiliser ici les propriétés des nombres complexes. Insistons sur le fait qu'il s'agit moins d'une démonstration que d'une méthode utile pour retrouver une formule de trigonométrie oubliée. En effet, l'introduction de la notation exponentielle pour les nombres complexes est une *conséquence* des formules de trigonométries usuelles...

• Quand on demande de calculer une intégrale, il est en général préférable de justifier auparavant que cette intégrale est bien définie (par exemple parce que la fonction intégrée est continue sur le segment d'intégration, comme ici). Évidemment, cela se fera oralement (et donc rapidement).

• Si les calculs à effectuer ici sont assez simples, il serait regrettable de ne pas se rendre compte de la présence de cas particuliers (ou d'en oublier) à l'oral. Lors de la préparation, il est vivement recommandé de s'appliquer dans les calculs : en cas d'erreur, il est souvent très compliqué de réfléchir et de calculer efficacement devant le jury.

• Quand les calculs sont longs, il ne faut pas hésiter à donner directement le résultat obtenu et à demander au jury s'il veut voir le détail des calculs.

3. ► Soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$. Les fonctions $t \mapsto P(t)Q(t)$ et $t \mapsto 1-t^2$ sont continues sur $]-1, 1[$ (ce sont des fonctions polynômes) et on a :

$$\forall t \in \,]-1,1[\,,\ 1-t^2 > 0.$$

De plus la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que la fonction $t \mapsto \dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1, 1[$ comme produit de fonctions qui le sont. De plus, comme PQ est une fonction polynôme, il existe un entier naturel n et des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que :

$$\forall t \in \,]-1,1[\,,\ \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}. \tag{1.1}$$

Soit alors $k \in [\![0, n]\!]$. Comme $1-t^2 = (1-t)(1+t)$, on a :

$$\left|\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\right| \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}} \quad \text{et} \quad \left|\frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\right| \underset{t\to -1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+t}}.$$

Comme les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$ et $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t}}$ sont des intégrales de Riemann convergentes, on en déduit, d'après les critères de comparaison d'intégrales de fonctions positives, que les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ sont absolument convergentes, donc convergentes.

On en déduit alors que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^k}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente et donc, avec (1.1) :

$$\boxed{\text{Pour tout couple } (P,Q) \text{ d'éléments de } \mathbb{R}[X],\ \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \text{ est une intégrale convergente.}}$$

► D'après le résultat précédent, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une application de $(\mathbb{R}[X])^2$ dans $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, on a :

$$\begin{aligned} \langle Q, P \rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{Q(t)P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \langle P, Q \rangle \end{aligned}$$

donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme symétrique. Par ailleurs, pour tout $(P,Q,R) \in (\mathbb{R}[X])^3$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle \lambda P + Q, R \rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{[\lambda P(t) + Q(t)]\,R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{\lambda P(t)R(t) + Q(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

et par linéarité de l'intégration, les intégrales en présence étant convergentes :

$$\begin{aligned} \langle \lambda P + Q, R \rangle &= \lambda \int_{-1}^{1} \frac{P(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} \frac{Q(t)R(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle \end{aligned}$$

donc $P \mapsto \langle P, R \rangle$ est linéaire et, par symétrie, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire. Par ailleurs, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\langle P, P \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{[P(t)]^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$$

donc, par positivité de l'intégration, comme la fonction $t \mapsto \dfrac{[P(t)]^2}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue et positive sur $]-1,1[$ et $-1 < 1$:

$$\langle P, P \rangle \geqslant 0$$

et :

$$\begin{aligned} \langle P, P \rangle = 0 &\Rightarrow \forall t \in\,]-1,1[\,,\ \frac{[P(t)]^2}{\sqrt{1-t^2}} = 0 \\ &\Rightarrow \forall t \in\,]-1,1[\,,\ P(t) = 0 \end{aligned}$$

et comme seul le polynôme nul admet une infinité de racines :

$$\langle P, P\rangle = 0 \Rightarrow P = 0,$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{(P,Q) \mapsto \langle P, Q\rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X]}$$

Commentaire

• Pour prouver la convergence de l'intégrale définissant $\langle P, Q\rangle$, on pouvait aussi donner un équivalent de $\dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ en 1 (respectivement en -1) mais cela obligeait à distinguer les cas où 1 ou -1 est racine de PQ. On pouvait également utiliser le changement de variable $t = \cos(\theta)$ (ce que l'on fera d'ailleurs dans la question suivante).

• Le temps est précieux pendant l'épreuve orale et il est donc important d'éviter de s'attarder sur les points « simples ». Dans cette question par exemple, on peut se contenter de dire oralement que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique grâce à la commutativité du produit dans $\mathbb{R}$ et à la linéarité de l'intégration. En revanche, le fait que la forme quadratique $P \mapsto \langle P, P\rangle$ est définie positive doit être justifié soigneusement (même si cela peut évidemment être fait oralement).

4. ▶ Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(p, q) \in [\![0, n]\!]^2$ tel que $p \neq q$. On a :

$$\langle T_p, T_q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{T_p(t)\, T_q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, \mathrm{d}t.$$

De plus, la fonction $\theta \mapsto \cos(\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective de $]0, \pi[$ sur $]-1, 1[$ donc, en effectuant le changement de variable $t = \cos(\theta)$, $\mathrm{d}t = -\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta$:

$$\langle T_p, T_q\rangle = \int_0^{\pi} \frac{T_p(\cos(\theta))\, T_q(\cos(\theta))}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}}\, \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

donc, avec le résultat de la question 1 :

$$\langle T_p, T_q\rangle = \int_0^{\pi} \frac{\cos(p\theta)\, \cos(q\theta)}{\sqrt{\sin^2(\theta)}}\, \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

et comme sin est positive sur $]0, \pi[$:

$$\begin{aligned}\langle T_p, T_q\rangle &= \int_0^{\pi} \frac{\cos(p\theta)\, \cos(q\theta)}{\sin(\theta)}\, \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi} \cos(p\theta)\, \cos(q\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= I_{p,q}\end{aligned}$$