Sujet n° 1

☆

A. Énoncé

P désignant un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$, on rappelle que, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $P(A) = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_m A^m$, où I désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On se propose de déterminer explicitement le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 1$ et la relation, valable pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n$.

Pour ce faire, on pose, pour tout n de $\mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. (a) Écrire la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, indépendante de n, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n.$$

   (b) Vérifier que : $(A - I)^2(A - 2I) = 0$.

2. On considère le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ défini par : $P(X) = (X - 1)^2(X - 2)$.

   (a) Justifier l'existence et l'unicité d'un couple (Q_n, R_n) de $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_2[X]$, tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X^n = PQ_n + R_n.$$

   (b) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe des réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$R_n(X) = a_n + b_n\,(X - 1) + c_n\,(X - 1)^2\,.$$

   (c) Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 1,\ b_n = n \quad \text{et} \quad c_n = 2^n - n - 1.$$

3. (a) Utiliser la question précédente pour écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n comme combinaison linéaire de $I, A - I$ et $(A - I)^2$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner la troisième ligne de la matrice A^n.

4. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, u_n en fonction de n.

B. Analyse et correction du sujet

1. (a) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = \begin{pmatrix} 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\boxed{\text{La matrice } A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ vérifie : } \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n}$$

(b) On a :

$$A - I = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

donc :

$$(A - I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\boxed{(A - I)^2 (A - 2I) = 0}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme P n'est pas le polynôme nul, le théorème de division euclidienne nous permet d'affirmer l'existence et l'unicité d'un couple (Q_n, R_n) de polynômes à coefficients réels tels que :

$$X^n = PQ_n + R_n \quad \text{avec : } \deg(R_n) < \deg(P)$$

et donc, comme $\deg(P) = 3$:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ il existe un unique } (Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}_2[X], \\ \text{tel que : } X^n = PQ_n + R_n.\end{array}}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $(1, X-1, (X-1)^2)$ est une famille échelonnée en degrés, donc elle est libre. Comme elle est formée de trois vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$ et comme $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3, elle en forme donc une base, ce qui nous permet de conclure, puisque R_n appartient à $\mathbb{R}_2[X]$:

$$\boxed{\exists\,(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3 \ /\ R_n(X) = a_n + b_n\,(X-1) + c_n\,(X-1)^2}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$PQ_n + a_n + b_n (X-1) + c_n (X-1)^2 = X^n. \tag{1}$$

Pour exploiter le fait que 1 est racine double de P, on remarque que l'on a aussi (par dérivation) :

$$P'Q_n + PQ_n' + b_n + 2c_n (X-1) = nX^{n-1}. \tag{2}$$

En évaluant (1) en 1 d'une part et en 2 d'autre part, et en évaluant (2) en 1, on en déduit :

$$\begin{cases} a_n = 1 \\ a_n + b_n + c_n = 2^n \\ b_n = n \end{cases}$$

et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 1,\ b_n = n \quad \text{et} \quad c_n = 2^n - n - 1}$$

Méthode
Retenir la méthode utilisée ici, très classique pour déterminer le reste dans la division euclidienne d'un polynôme A par un polynôme P non nul (en utilisant les racines de P).

3. (a) On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X^n = PQ_n + 1 + n(X-1) + (2^n - n - 1)(X-1)^2$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P(A)Q_n(A) + I + n(A-I) + (2^n - n - 1)(A-I)^2$$

et finalement, comme $P(A) = 0$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = I + n(A-I) + (2^n - n - 1)(A-I)^2}$$

Rappel de cours
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On a :

$$(P+Q)(A) = P(A) + Q(A) \quad \textit{et} \quad (PQ)(A) = P(A)\,Q(A).$$

(b) On en déduit que :

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la dernière ligne de } A^n \text{ est :} \\ \begin{pmatrix} 2^n - n - 1 & 3n - 2^{n+1} + 2 & 2^n - 2n \end{pmatrix} \end{array}}$$

4. (a) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(n)$: « $X_n = A^n X_0$ » est vraie.

   ◇ Pour $n = 0$. Comme $A^0 = I$, on a :
   $$X_0 = A^0 X_0$$
   donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

   ◇ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. On a alors, par définition de A :
   $$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n \\ &= AA^n X_0 \\ &= A^{n+1} X_0 \end{aligned}$$
   donc : $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

   ◇ On a donc :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n X_0$$
   et donc, comme $X_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$:
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

> **Alerte, erreur fréquente !**
> *Attention à ne pas dire que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique : il s'agit d'une suite de matrices, et non d'une suite réelle !*

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est le coefficient de la troisième ligne de X_n donc, d'après le résultat précédent :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \begin{pmatrix} 2^n - n - 1 & 3n - 2^{n+1} + 2 & 2^n - 2n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
et donc :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 + 2n - 2^n}$$

Sujet n° 2

★

A. Énoncé

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on définit les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$P_y = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & y \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B}$.
On note id l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice I dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Calculer $(A-2I)^2$ puis vérifier que $(A-2I)^3 = O_3$ (matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) En déduire que 2 est l'unique valeur propre de A et déterminer une base et la dimension du sous-espace propre de A associé à la valeur propre 2.
2. Montrer par une méthode du pivot que P_y est inversible si et seulement si $y \neq -1$.
3. On note dans toute la suite les vecteurs $u_1 = (0,4,4)$ et $u_2 = (2,0,2)$.
   (a) Déterminer l'unique vecteur u_3 de la forme $u_3 = (1, y, 0)$ tel que :
   $$f(u_3) = u_2 + 2u_3.$$
   (b) On considère la famille $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$. Donner la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la famille $\mathcal{B}'$. Montrer alors que P est inversible puis justifier que la famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Exprimer $f(u_1)$ en fonction de u_1 puis $f(u_2)$ en fonction de u_1 et u_2. En déduire que la matrice T de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}'$ est $T = 2I + N$.
   Donner, en la justifiant en une seule ligne, la relation liant les matrices A, T, P et P^{-1}.
4. On cherche maintenant à déterminer l'ensemble S des endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec f.
   (a) Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On note M' la matrice représentative de h dans la base $\mathcal{B}'$. Justifier que :
   $$h \in S \Leftrightarrow NM' = M'N.$$

(b) En posant $M' = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$, montrer que :

$$h \in S \Leftrightarrow M' = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ 0 & a & a' \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

(c) Calculer N^2 et en déduire que : $S = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}, f - 2\mathrm{id}, (f - 2\mathrm{id})^2)$.

(d) Prouver que la famille (I, N, N^2) est libre et en déduire la dimension de S.

(e) Prouver alors que (id, f, f^2) est une base de S.

B. Analyse et correction du sujet

1. (a) ▶ On a :

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$\boxed{(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}}$$

▶ On a alors :

$$(A - 2I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\boxed{(A - 2I)^3 = O_3}$$

(b) ▶ D'après le résultat précédent, $(X - 2)^3$ est un polynôme annulateur de A, donc 2 est la seule valeur propre possible de A. De plus, on peut remarquer que les deux dernières colonnes de $A - 2I$ sont colinéaires, donc $A - 2I$ n'est pas inversible et 2 est donc valeur propre de A, ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{2 \text{ est la seule valeur propre de } A}$$

► Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}(A-2I)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y+z=0 \\ 2x=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=z \end{cases} \quad ,\end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure :

$\boxed{\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base du sous-espace propre } E_2(A) \text{ associé à la valeur propre 2, qui est de dimension 1.}}$

2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Pour tout X appartenant à $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}P_yX = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & y \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} X = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & y \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = 0 \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & y \\ 0 & 2 & -y \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = 0 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & y \\ 0 & 2 & -y \\ 0 & 0 & 1+y \end{pmatrix}}_{T_y} X = 0.\end{aligned}$$

On en déduit que P_y est inversible si et seulement si T_y est inversible donc, comme T_y est une matrice triangulaire, si et seulement si l'un au moins de ses coefficients diagonaux est nul, donc :

$$\boxed{P_y \text{ est inversible si et seulement si } y \neq -1}$$

Rappel de cours
Si T est une matrice ***triangulaire****, T est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Attention, ce résultat n'est valable que pour une matrice triangulaire.*

3. (a) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a, en notant $u_3 = (1, y, 0)$:

$$\begin{aligned} f(u_3) = u_2 + 2u_3 &\Leftrightarrow (f - 2\mathrm{Id})(u_3) = u_2 \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + y = 2 \\ 1 - y = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow y = 1, \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\begin{array}{c} u_3 = (1,1,0) \text{ est l'unique vecteur de la forme } (1,y,0) \text{ tel que :} \\ f(u_3) = u_2 + 2u_3. \end{array}}$$

(b) ► En notant $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{cases} u_1 = 4e_2 + 4e_3 \\ u_2 = 2e_1 + 2e_3 \\ u_3 = e_1 + e_2 \end{cases}$$

donc :

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = P_1}$$

Rappel de cours
Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si $\mathcal{C} = (u_1, \ldots, u_n)$ est une famille de vecteurs de E, la matrice de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice P telle que, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de P soit la colonne des coordonnées de u_j dans $\mathcal{B}$.

► Comme $1 \neq -1$, on en déduit, d'après le résultat de la question 2 :

$$\boxed{P \text{ est inversible}}$$

► Comme P est inversible, ses colonnes forment une famille libre, donc la famille $\mathcal{B}'$ est libre. Comme elle est formée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, on en conclut :

$$\boxed{\mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$