
Table des matières

Liste des exercices	13
Liste des notations utilisées	17
Trois points de cours	21
Théorème de Fubini-Tonelli pour les sommes	21
Stabilité des points d'équilibre d'un système différentiel	24
Théorème de séparation des aléas	26
Exercices	29
Index des leçons	683
Bibliographie	693

Liste des exercices

1	Fonctions multiplicatives	29
2	Deux sommes relatives aux fonctions périodiques	34
3	Parties sans somme d'un groupe commutatif	37
4	Groupe des inversibles d'un corps fini	40
5	Carrés dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	43
6	Groupes de cardinal p^2	48
7	Théorème de Dixon	50
8	Parties d'un groupe stables par produit	53
9	Probabilité pour que deux permutations commutent	55
10	Décomposition minimale d'une permutation en produit de transpositions	60
11	Condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble de transpositions engendre S_n	63
12	Une étrange tablette de chocolat	69
13	Parties de \mathbb{R} stables par somme et d'intersection non vide avec \mathbb{R}_+^* et \mathbb{R}_-^*	76
14	2^n commence par un 7 pour une infinité de $n \in \mathbb{N}$	79
15	Étude des sous-anneaux de \mathbb{Q}	81
16	Polynôme chromatique	84
17	Polynômes positifs sur certaines parties de \mathbb{R}	92
18	Nombres algébriques	96
19	Ensembles définis à partir d'un nombre transcendant	104
20	Matrices commutant avec les matrices de permutation	108
21	Moyenne et maximum du déterminant	110
22	Construction d'une matrice de Hadamard d'ordre 12	114
23	Matrices à coefficients entiers conservant le pgcd	120
24	Endomorphismes qui conservent le déterminant	122
25	Des réels qui se laissent bien grouper	124
26	Dénombrement dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n$	127
27	Dénombrement de polynômes	130
28	Théorème de Flanders	134
29	Matrice d'incidence	139
30	La dimension doit être un multiple de 6	141

31	Lien entre le rang d'un endomorphisme et le degré d'un de ses polynômes annulateurs	144
32	Dénombrement d'images et de noyaux	146
33	Matrices nilpotentes	150
34	De l'usage de la trace	156
35	Polynôme minimal égal au polynôme caractéristique	160
36	Endomorphismes cycliques	162
37	Sous-espaces composés uniquement de matrices diagonalisables	165
38	Sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(K)$	168
39	Morphismes de $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ dans $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ (1)	171
40	Réduction de Gauss effective	175
41	Ce ne sont que des demi-plans et pourtant...	184
42	Groupes de Coxeter	190
43	Caractérisation des matrices symétriques définies positives par les mineurs principaux	193
44	Où algèbre linéaire et algèbre bilinéaire s'entrecroisent	194
45	Forme quadratique définie par une matrice nilpotente	198
46	Sous-groupes compacts de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ contenant $O_n(\mathbb{R})$	201
47	Morphismes de $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \times)$ dans $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$ (2)	207
48	Matrices M telles que $2M$ est semblable à M	211
49	Codes correcteurs et borne de Singleton	215
50	Parties denses et convexes de \mathbb{R}^n	219
51	Le plongeur le plus long	223
52	Théorème de Carathéodory	231
53	Prolongement de formes linéaires et application	236
54	Lemme d'Auerbach	239
55	Famille totale de vecteurs propres	240
56	Triangles sphériques	243
57	Une partie finie de la sphère unité	249
58	Billard circulaire	257
59	Point de Fermat-Torricelli dans un triangle quelconque	262
60	Matrice de Gram et cercles tangents	269
61	Points de \mathbb{Q}^2 sur une ellipse de centre dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$	274
62	Involutions continues de \mathbb{R}	280
63	Équation fonctionnelle $f \circ f = \varphi$ où φ est affine	282
64	Équation fonctionnelle $f' = f \circ f$	288
65	Approximation de π par la méthode d'Archimède	291
66	Distance à un graphe	295
67	Une suite bornée non convergente	298
68	Puissances d'une matrice strictement stochastique	304
69	Série des inverses des nombres premiers	308

70	Une série issue de l'arithmétique	315
71	Étude d'une série semi-convergente	317
72	Équivalent d'une intégrale et d'une suite	327
73	Développement asymptotique d'une suite	331
74	Théorème de Glaeser	339
75	Lien entre la limite de $f'(x)$ et celle de $f(x)/x$ en $+\infty$	346
76	Une suite de fonctions (1)	349
77	Un théorème de Dini et une application	356
78	Une suite de fonctions (2)	361
79	Fonction définie par une série	365
80	Calcul de $\zeta(2)$ à l'aide d'une intégrale double	369
81	Développement en série entière	376
82	Un théorème de Dieudonné	380
83	Fonction dont toutes les dérivées sont bornées par 1	385
84	Une étrange tablette de chocolat — version analytique	390
85	Calcul d'intégrales à l'aide d'une série de Fourier	393
86	Calcul des intégrales de Fresnel via les séries de Fourier	398
87	Étude d'un opérateur linéaire par les séries de Fourier	401
88	Fonctions convexes et application à la médiane	405
89	Inégalité de Jensen et application à l'aversion au risque	409
90	Critère d'équirépartition de Weyl	413
91	Formule de quadrature de Gauss-Jacobi	418
92	Une isométrie de \mathcal{L}^2	423
93	Fonction définie par une intégrale	426
94	Racine carrée de la primitivation	429
95	Théorème d'Artin et applications	434
96	Formule d'inversion de Fourier	437
97	Transformée de Fourier et équations différentielles	443
98	Transformée de Laplace et application	449
99	Étude d'une récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants dans $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$	455
100	Recherche de conditions pour que deux fonctions données soient solutions d'une équation différentielle linéaire	459
101	Une équation différentielle qui ne dit pas son nom	461
102	Étude de l'équation $y'' - y = \cos(x) $	465
103	Une inégalité différentielle	471
104	Étude d'un système différentiel linéaire	474
105	Quelques outils pour l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires	478
106	Une équation différentielle autonome	485
107	Un modèle de croissance logistique avec prédation	491

108	Modèle de Lotka-Volterra	498
109	Modèles compartimentaux en épidémiologie	506
110	Étude d'une famille de courbes du plan	515
111	Inégalité isopérimétrique	519
112	Une courbe dans \mathbb{R}^n	527
113	Une équation matricielle	529
114	Inversibilité d'une matrice définie par une intégrale	532
115	Racine carrée d'une matrice symétrique définie positive	535
116	Ellipsoïde de John	539
117	Point de Fermat-Torricelli d'un triangle équilatéral	546
118	Immersion isométrique d'un tore plat dans \mathbb{R}^3	553
119	Fonctions implicites et valeurs propres	558
120	Lemme de non-rétraction	563
121	Rencontres autour de l'eau	570
122	Espérance conditionnelle	576
123	Caractérisation d'une loi discrète par ses moments	578
124	Dés truqués et loi uniforme	583
125	Rang d'apparition de la séquence « pile-face »	586
126	Rang d'apparition de la séquence « face-face-pile »	589
127	Processus de Galton-Watson	598
128	Une balade sur \mathbb{Z}	604
129	Théorème de Pólya (version dénombrement)	609
130	Théorème de Pólya (version analytique)	621
131	Ruine du joueur et problème du collectionneur	628
132	Un aperçu de la loi Gamma	635
133	Formule de Stirling via le théorème central limite	643
134	Une inégalité de concentration	647
135	Inégalité de Le Cam	652
136	Inégalité de Hoeffding	656
137	Lemme de Slutsky et Delta-méthode	659
138	Le problème du char d'assaut allemand (avec remise)	667
139	Le problème du char d'assaut allemand (sans remise)	674
140	L'aiguille de Buffon	679