

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Raisonnement et vocabulaire ensemblistes</b>	<b>1</b>
1.1	Rudiments de logique . . . . .	1
1.2	Ensembles . . . . .	2
1.3	Applications et relations . . . . .	3
1.4	Exercices résolus . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Calculs algébriques</b>	<b>13</b>
2.1	Sommes et produits . . . . .	13
2.2	Coefficients binomiaux et formule du binôme . . . . .	14
2.3	Systèmes linéaires . . . . .	15
2.4	Exercices résolus . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Nombres complexes et trigonométrie</b>	<b>25</b>
3.1	Nombres complexes . . . . .	25
3.2	Module . . . . .	26
3.3	Nombres complexes de module 1 et trigonométrie . . . . .	26
3.4	Formes trigonométriques . . . . .	29
3.5	Équations du second degré . . . . .	29
3.6	Racines $n$ -ièmes . . . . .	30
3.7	Exponentielle complexe . . . . .	30
3.8	Interprétation géométrique des nombres complexes . . . . .	31
3.9	Exercices résolus . . . . .	32
3.10	Problèmes résolus . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Techniques fondamentales de calcul en analyse</b>	<b>47</b>
4.1	Inégalités dans $\mathbb{R}$ . . . . .	47
4.2	Fonctions de la variable réelle à valeurs réelles ou complexes . . . . .	49
4.2.1	Généralités sur les fonctions . . . . .	49
4.2.2	Dérivation . . . . .	52
4.2.3	Étude d'une fonction . . . . .	53
4.2.4	Fonctions usuelles . . . . .	54
4.2.5	Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle . . . . .	58
4.3	Primitives et équations différentielles linéaires . . . . .	59
4.3.1	Calcul de primitives . . . . .	59
4.3.2	Équations différentielles du premier ordre . . . . .	62
4.3.3	Équations différentielles linéaires du second ordre . . . . .	64

4.4	Exercices résolus . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Nombres réels et suites numériques</b>	<b>113</b>
5.1	Ensembles de nombres usuels . . . . .	113
5.2	Propriété de la borne supérieure . . . . .	114
5.3	Généralités sur les suites réelles . . . . .	114
5.4	Limite d'une suite réelle . . . . .	115
5.5	Suites monotones . . . . .	116
5.6	Suites extraites . . . . .	117
5.7	Traduction séquentielle de certaines propriétés . . . . .	117
5.8	Suites complexes . . . . .	117
5.9	Suites particulières . . . . .	118
5.10	Exercices résolus . . . . .	120
5.11	Problèmes résolus . . . . .	134
<b>6</b>	<b>Limites, continuité, dérivabilité</b>	<b>139</b>
6.1	Limites et continuité . . . . .	139
6.1.1	Limite d'une fonction en un point . . . . .	139
6.1.2	Continuité . . . . .	141
6.1.3	Image d'un intervalle par une fonction continue . . . . .	143
6.1.4	Image d'un segment par une fonction continue . . . . .	144
6.1.5	Continuité et injectivité . . . . .	144
6.1.6	Fonctions complexes . . . . .	144
6.2	Dérivabilité . . . . .	145
6.2.1	Nombre dérivé, fonction dérivée . . . . .	145
6.2.2	Extremum local et point critique . . . . .	147
6.2.3	Théorèmes de Rolle et des accroissements finis . . . . .	147
6.2.4	Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ . . . . .	149
6.2.5	Fonctions complexes . . . . .	150
6.3	Exercices résolus . . . . .	150
6.4	Problèmes résolus . . . . .	172
<b>7</b>	<b>Analyse asymptotique</b>	<b>181</b>
7.1	Relations de comparaison : cas des suites . . . . .	181
7.2	Relations de comparaison : cas des fonctions . . . . .	181
7.3	Développements limités . . . . .	183
7.4	Exemples de développements limités . . . . .	186
7.5	Exercices résolus . . . . .	187
7.6	Problèmes résolus . . . . .	207
<b>8</b>	<b>Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs</b>	<b>215</b>
8.1	Divisibilité et division euclidienne . . . . .	215
8.2	PGCD et algorithme d'Euclide . . . . .	215
8.3	Entiers premiers entre eux . . . . .	216
8.4	Nombres premiers . . . . .	217
8.5	Congruences . . . . .	218
8.6	Exercices résolus . . . . .	218

<b>9</b>	<b>Structures algébriques usuelles</b>	<b>233</b>
9.1	Lois de composition internes . . . . .	233
9.2	Structure de groupe . . . . .	234
9.3	Structures d'anneau et de corps . . . . .	235
9.4	Exercices résolus . . . . .	236
9.5	Problèmes résolus . . . . .	243
<b>10</b>	<b>Polynômes et fractions rationnelles</b>	<b>247</b>
10.1	Anneau des polynômes à une indéterminée . . . . .	247
10.2	Divisibilité et division euclidienne . . . . .	248
10.3	Fonctions polyomiales et racines . . . . .	249
10.4	Dérivation . . . . .	250
10.5	Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$ . . . . .	251
10.6	Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$ . . . . .	251
10.7	Formule d'interpolation de Lagrange . . . . .	252
10.8	Fractions rationnelles . . . . .	252
10.9	Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$ . . . . .	253
10.10	Exercices résolus . . . . .	254
10.11	Problèmes résolus . . . . .	261
<b>11</b>	<b>Espaces vectoriels et applications linéaires</b>	<b>265</b>
11.1	Espaces Vectoriels . . . . .	265
11.1.1	Espaces vectoriels . . . . .	265
11.1.2	Sous-espaces vectoriels . . . . .	266
11.1.3	Familles de vecteurs . . . . .	267
11.1.4	Somme d'un nombre fini de sous-espaces . . . . .	267
11.2	Espaces de dimension finie . . . . .	268
11.2.1	Existence d'une base . . . . .	268
11.2.2	Espace de dimension finie . . . . .	268
11.2.3	Sous-espaces et dimension . . . . .	269
11.3	Applications Linéaires . . . . .	270
11.3.1	Généralités . . . . .	270
11.3.2	Endomorphismes . . . . .	271
11.3.3	Détermination d'une application linéaire . . . . .	272
11.3.4	Théorème du rang . . . . .	273
11.3.5	Formes linéaires et hyperplans . . . . .	273
11.4	Sous-espaces affines d'un espace vectoriel . . . . .	274
11.5	Exercices résolus . . . . .	275
11.6	Problèmes résolus . . . . .	286
<b>12</b>	<b>Matrices</b>	<b>291</b>
12.1	Calcul matriciel . . . . .	291
12.1.1	Espaces de matrices . . . . .	291
12.1.2	Produit matriciel . . . . .	292
12.1.3	Transposition . . . . .	293
12.2	Matrices et applications linéaires . . . . .	294

12.2.1	Matrice d'une application linéaire dans différentes bases . . . .	294
12.2.2	Application linéaire canoniquement associée à une matrice . . .	294
12.2.3	Blocs . . . . .	295
12.3	Changements de bases, équivalence et similitude . . . . .	296
12.3.1	Changements de base . . . . .	296
12.3.2	Matrices équivalentes et rang . . . . .	296
12.3.3	Matrices semblables et trace . . . . .	296
12.4	Opérations élémentaires et systèmes linéaires . . . . .	297
12.4.1	Opérations linéaires . . . . .	297
12.4.2	Systèmes linéaires . . . . .	298
12.5	Exercices résolus . . . . .	302
12.6	Problèmes résolus . . . . .	308
<b>13</b>	<b>Groupe symétrique et déterminants</b>	<b>313</b>
13.1	Groupe symétrique . . . . .	313
13.1.1	Généralités . . . . .	313
13.1.2	Signature d'une permutation . . . . .	313
13.2	Déterminants . . . . .	314
13.2.1	Formes $n$ -linéaires alternées . . . . .	314
13.2.2	Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base . . . . .	315
13.3	Déterminant d'un endomorphisme . . . . .	315
13.3.1	Déterminant d'une matrice carrée . . . . .	315
13.3.2	Calcul des déterminants . . . . .	316
13.3.3	Comatrice . . . . .	317
13.4	Exercices résolus . . . . .	317
<b>14</b>	<b>Espaces préhilbertiens réels</b>	<b>325</b>
14.1	Produit scalaire . . . . .	325
14.2	Norme associée à un produit scalaire . . . . .	325
14.3	Orthogonalité . . . . .	326
14.4	Bases orthonormales . . . . .	327
14.5	Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie . . . . .	328
14.6	Hyperplans affines d'un espace euclidien . . . . .	328
14.7	Isométries vectorielles d'un espace euclidien . . . . .	329
14.8	Matrices orthogonales . . . . .	330
14.9	Isométries vectorielles en dimension 2 . . . . .	331
14.10	Exercices résolus . . . . .	331
<b>15</b>	<b>Intégration</b>	<b>341</b>
15.1	Continuité uniforme . . . . .	341
15.2	Fonctions continues par morceaux . . . . .	341
15.3	Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment . . . . .	342
15.4	Sommes de Riemann . . . . .	343
15.5	Intégrale fonction de la borne supérieure . . . . .	344
15.6	Calcul de primitives . . . . .	345
15.7	Formules de Taylor . . . . .	349

15.8 Exercices résolus . . . . .	350
<b>16 Séries numériques</b>	<b>379</b>
16.1 Généralités . . . . .	379
16.2 Séries à termes positifs . . . . .	380
16.3 Comparaison série-intégrale dans le cas monotone . . . . .	380
16.4 Séries absolument convergentes . . . . .	381
16.5 Représentation décimale des réels . . . . .	381
16.6 Exercices résolus . . . . .	381
16.7 Problèmes résolus . . . . .	390
<b>17 Dénombrement</b>	<b>393</b>
17.1 Cardinal d'un ensemble fini . . . . .	393
17.2 Listes et combinaisons . . . . .	394
17.3 Exercices résolus . . . . .	394
<b>18 Probabilités</b>	<b>405</b>
18.1 Probabilités sur un univers fini . . . . .	405
18.1.1 Expérience aléatoire et univers . . . . .	405
18.1.2 Espaces probabilisés finis . . . . .	405
18.1.3 Probabilités conditionnelles . . . . .	406
18.1.4 Événements indépendants . . . . .	407
18.2 Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini . . . . .	407
18.2.1 Variables aléatoires . . . . .	407
18.2.2 Lois usuelles . . . . .	407
18.2.3 Couples de variables aléatoires réelles . . . . .	408
18.2.4 Variables aléatoires indépendantes . . . . .	408
18.2.5 Espérance . . . . .	409
18.2.6 Variance, écart type et covariance . . . . .	409
18.3 Exercices résolus . . . . .	410
18.4 Problèmes résolus . . . . .	429